

PAUTA TEST N° 1 CÁLCULO III
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 45 MINUTOS **FECHA : Lu 04/04/05**
PROFESOR: *Juan Carlos Sandoval Avendaño*

- 1) Obtenga la ecuación del plano que pasa a través de la recta de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$, y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.
(20 puntos).

Solución:

Sea $\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ el plano buscado.

Obtengamos en primer lugar la recta de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$.

Despejando la variable z en ambas ecuaciones tenemos :

$$z = x - 1 ; z = \frac{y-3}{-2}$$

Por lo tanto, las ecuaciones simétricas, de la recta de intersección de los dos planos, son:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$$

Luego, un punto de la recta sería $(x, y, z) = (1, 3, 0)$, pues $\frac{1-1}{1} = \frac{3-3}{-2} = \frac{0}{1} = 0$
; otro punto de la recta es $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 1)$, pues $\frac{2-1}{1} = \frac{1-3}{-2} = \frac{1}{1} = 1$

Reemplazando los puntos recién obtenidos en la ecuación del plano π , se tiene :

$$a(1 - 2) + b(3 - 1) + c(0 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$-a + 2b - c = 0 \quad (1)$$

Por otro lado, sabemos que el plano $x + y - 2z = 1$ es perpendicular al que andamos buscando, es decir, el vector normal del plano anterior es ortogonal con el vector normal del plano que andamos buscando. Así,

$$\langle (1, 1, -2), (a, b, c) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$a + b - 2c = 0 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) :

$$3b - 3c = 0 \Rightarrow b = c$$

Reemplazando $b = c$ en (2) :

$$a + c - 2c = 0 \Rightarrow a - c = 0 \Rightarrow a = c$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación del plano π :

$$c(x - 2) + c(y - 1) + c(z - 1) = 0 \Rightarrow c \neq 0$$

$$x - 2 + y - 1 + z - 1 = 0 \Rightarrow x + y + z = 4$$

$\therefore x + y + z = 4$ es la ecuación del plano buscado. $\square$

2) Para qué valores de c el ángulo entre los vectores $\langle 1, 2, 1 \rangle$ y $\langle 1, 0, c \rangle$ es igual a 60° .

(20 puntos).

Solución:

Recordemos que : $\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$, donde α es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \langle 1, 2, 1 \rangle, \langle 1, 0, c \rangle \rangle = 1 + c$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + c^2} = \sqrt{1 + c^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \Rightarrow \cos(60^\circ) = \frac{1+c}{\sqrt{6}\sqrt{1+c^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1+c}{\sqrt{6+6c^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{6+6c^2} = 2+2c \Rightarrow 6+6c^2 = 4+8c+4c^2 \Rightarrow 2c^2-8c+2=0 \Rightarrow$$

$$c^2 - 4c + 1 = 0$$

$$c = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} \Rightarrow c = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow c = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$c_1 = 2 + \sqrt{3}; c_2 = 2 - \sqrt{3} \quad \square$$

- 3) a) Obtenga las ecuaciones simétricas para la recta que pasa a través del punto $(0, 2, -1)$ y es paralela a la recta $x = 1 + 2t, y = 3t, z = 5 - 7t$.
 b) Encuentre los puntos de intersección de la recta anterior con los planos coordenados.

(20 puntos).

Solución:

a) Sea $\mathbf{r} = \langle a, b, c \rangle$ el vector director de la recta buscada.
 Recordemos que dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos, es decir,

$$\langle a, b, c \rangle = \alpha \langle 2, 3, -7 \rangle \Rightarrow a = 2\alpha, b = 3\alpha, c = -7\alpha$$

Por lo tanto, dado que la recta buscada pasa por el punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 2, -1)$ las ecuaciones simétricas serán :

$$\frac{x-0}{2\alpha} = \frac{y-2}{3\alpha} = \frac{z+1}{-7\alpha} \Rightarrow \alpha \neq 0 \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-7} \star$$

b) Intersección con los planos coordenados:

Plano xy :

$$z = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{0+1}{-7} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{1}{-7} \Rightarrow x = -\frac{2}{7} \\ \frac{y-2}{3} = \frac{1}{-7} \Rightarrow y = -\frac{3}{7} + 2 \Rightarrow y = \frac{11}{7} \end{cases}$$

Así, el punto de intersección de la recta con el plano xy es $(-\frac{2}{7}, \frac{11}{7}, 0)$

Plano xz :

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{0-2}{3} = \frac{z+1}{-7} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{-2}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \\ \frac{-2}{3} = \frac{z+1}{-7} \Rightarrow z = \frac{14}{3} - 1 \Rightarrow z = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Así, el punto de intersección de la recta con el plano xz es $(-\frac{4}{3}, 0, \frac{11}{3})$

Plano yz :

$$x = 0 \Rightarrow \frac{0}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-7} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0}{2} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow y = 2 \\ \frac{0}{2} = \frac{z+1}{-7} \Rightarrow z = -1 \end{cases}$$

Así, el punto de intersección de la recta con el plano xz es $(0, 2, -1)$ $\square$