UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS

PAUTA PRUEBA Nº 3
CÁLCULO III
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 50 MINUTOS FECHA : Mi 22/06/05
PROFESOR: *Juan Carlos Sandoval Avendaño*

Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando TODAS sus respuestas**. Si corresponde puede dar un contraejemplo. Se le descontará 2 (dos) puntos por cada respuesta incorrecta o sin justificar.

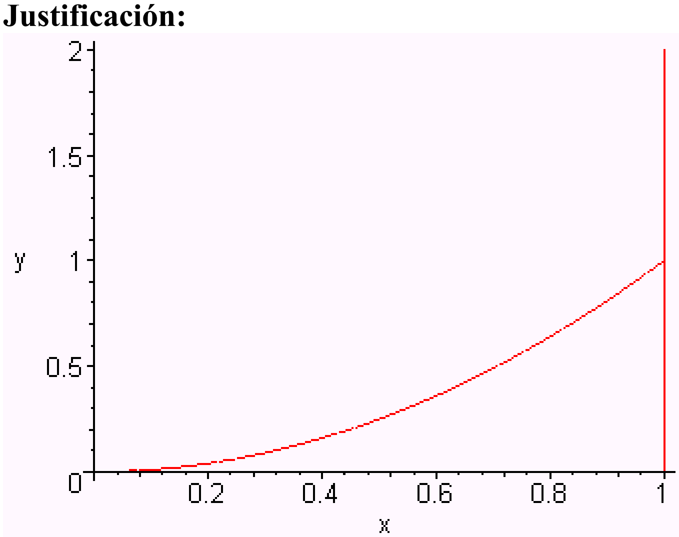
$a)$ __F__ $\int_0^4 \int_0^2 x\, y\, dx\, dy = \frac{32}{3}$

Justificación:

$\int_0^4 \int_0^2 x\, y\, dx\, dy = \int_0^4 y \int_0^2 x\ dx\, dy = \int_0^4 y \frac{x^2}{2}\Big|_0^2\ dy = \int_0^4 2y\, dy = y^2\Big|_0^4 = 16 \neq \frac{32}{3}$★

$b)$ __F__ $\int_D \int x\, cos(y)\, dA = 1$, donde D está acotado por $y = 0$, $y = x^2, x = 1$

Justificación:

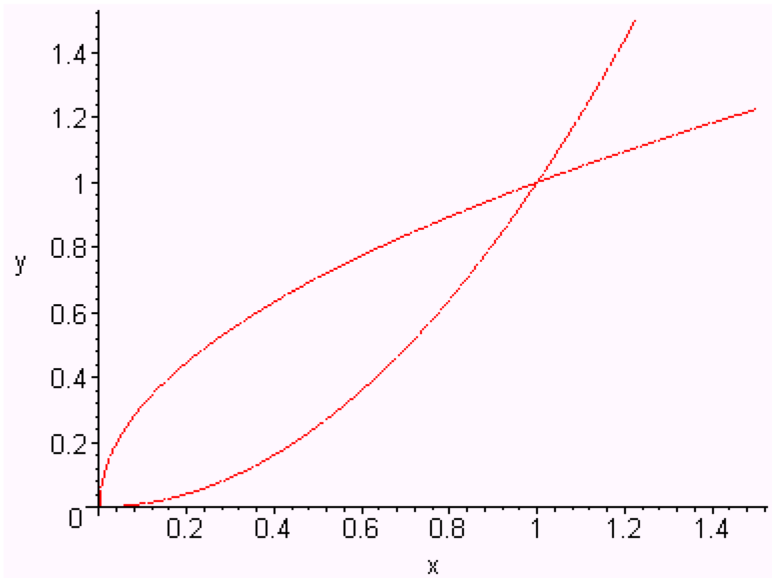


$\int_D \int x\, cos(y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} x\, cos(y)\, dy\, dx = \int_0^1 x\, sen(y)\Big|_0^{x^2}\ dx =$

$\int_0^1 x\, sen(x^2)\ dx = -cos(x^2)/2\Big|_0^1 = (-cos(1) + 1)/2 \approx 0.23 \neq 1$★

$c)$ __F__ El volumen del sólido que está bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región acotada por $y = x^2$ y $x = y^2$ es $2\pi^2$.

Justificación:



Busquemos los puntos de intersección de las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$:

$y = x^2 \Rightarrow^{x=y^2} y = (y^2)^2 \Rightarrow y = y^4 \Rightarrow y - y^4 = 0 \Rightarrow y(1-y^3) = 0 \Rightarrow y = 0$ ó $y^3 = 1 \Rightarrow y_1 = 0$ ó $y_2 = 1$

Luego, $x = y^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^2 = 0 \\ x_2 = 1^2 = 1 \end{cases}$

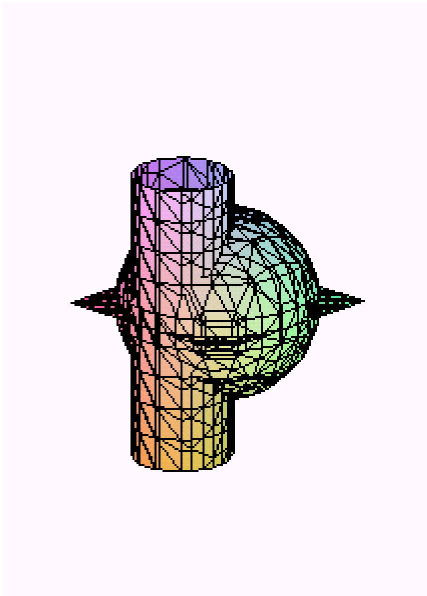
Por lo tanto, los puntos de intersección sony. $P_1 = (0,0) \quad P_2 = (1,1)$

$$\therefore\ V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\ dy\,dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} - x^4 + x^{3/2}/3 - x^6/3\right) dx =$$

$$\left[(2/7)\,x^{7/2} - x^5/5 + 2x^{5/2}/15 - x^7/21\right]_0^1 = 18/105 = 6/35 \neq 2\pi^2 \bigstar$$

$d)$ __F__ El área superficial de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que cae dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y arriba del plano xy es $\sqrt{2}\,a^2$

Justificación:



El área superficial está dada por :

$$A(S) = \int_D\int \sqrt{\left[f_x(x,y)\right]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\ dA$$

En este caso $z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, luego

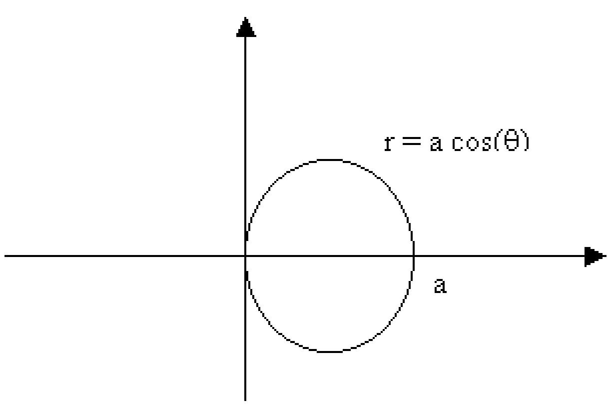
$$z_x = f_x(x,y) = \ -x\,(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$$

$$z_y = f_y(x,y) = \ -y\,(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$$

Notemos que el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ está dado por:

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow (x^2 - ax) + y^2 = 0 \Rightarrow (x - \tfrac{a}{2})^2 + y^2 = \tfrac{a^2}{4}$$

Luego, es un cilindro con centro en $(\frac{a}{2}\ ,\ 0)$ y de radio $\frac{a}{2}$.



Por lo tanto,

$$A(S) = \int_D\int \sqrt{\Big[f_x(x,y)\Big]^2 + \Big[f_y(x,y)\Big]^2 + 1}\ dA =$$

$$\int_D\int \sqrt{\Big[-x\,(a^2-x^2-y^2)^{-1/2}\Big]^2 + \Big[-y\,(a^2-x^2-y^2)^{-1/2}\Big]^2 + 1}\ dA =$$

$$\int_D\int \sqrt{\Big[(x^2+y^2)/\,(a^2-x^2-y^2)\Big] + 1}\ dA =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\,cos(\theta)} \sqrt{\Big[r^2/\,(a^2-r^2)\Big] + 1}\ r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\,cos(\theta)} \sqrt{\tfrac{r^2}{a^2-r^2} + 1}\ r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\,cos(\theta)} \sqrt{\tfrac{r^2+a^2-r^2}{a^2-r^2}}\ r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\,cos(\theta)} \sqrt{\tfrac{a^2}{a^2-r^2}}\ r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\,cos(\theta)} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\,d\theta =$$

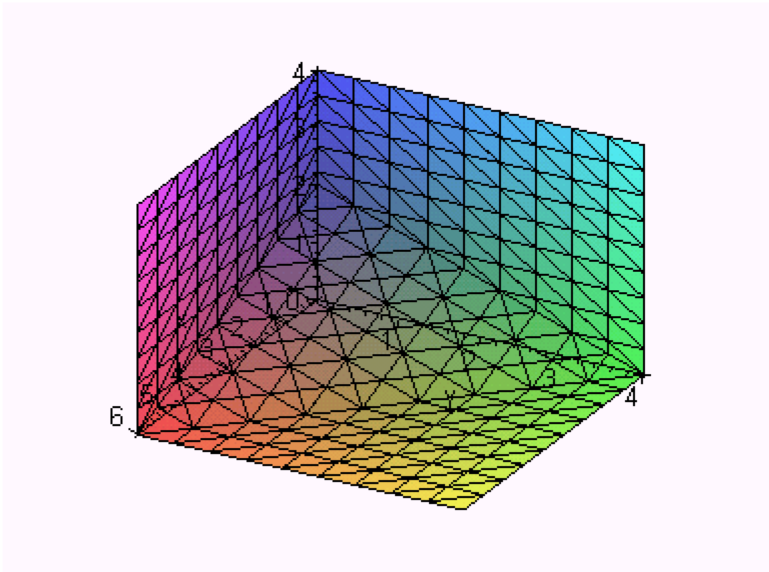
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-a\sqrt{a^2-r^2}\Big)\Big|_0^{a\,cos(\theta)}\ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -a\Big(\sqrt{a^2-a^2\,cos^2(\theta)}\ - a\Big)\ d\theta =$$

$$2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(1-\sqrt{1-\ cos^2(\theta)}\Big)\ d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(\theta)\ \ d\theta =$$

$$a^2\pi - 2a^2\,(-cos(\theta))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2\pi - 2a^2\ = a^2(\pi-2) \neq \sqrt{2}\,a^2\ \bigstar$$

$e)$ __V__ El volumen del tetraedro acotado por los planos coordenados y el plano $2x + 3y + 6z = 12$ es 8.

Justificación:



El plano $2x + 3y + 6z = 12$ intersecta al plano xy cuando $z = 0$, es decir,

$2x + 3y + 6(0) = 12 \Rightarrow y = (12 - 2x)/3 \Rightarrow y = 4 - 2/3\,x$

Del gráfico observamos que x se mueve en el intervalo de 0 a 6, así

$$V = \int_0^6 \int_0^{4-(2/3)x} \int_0^{(12-2x-3y)/6} dz\,dy\,dx \; =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^6 \int_0^{(12-2x)/3} (12 - 2x - 3y)\,dy\,dx \; = \frac{1}{6}\int_0^6 \left(\frac{(12-2x)^2}{3} - \frac{3}{2}\,\frac{12-2x}{9} \right) dx \; =$$

$$\frac{1}{36}\int_0^6 (12-2x)^2\,dx \; = \frac{1}{36}\,\frac{-1}{6}\,(12-2x)^3\Big|_0^6 \; = 8\bigstar$$

$f)$ __F__ El momento de inercia I_x de un cubo con densidad constante 2 y lado L, si uno de los vértices está en el origen y tres aristas caen en los ejes coordenados es $\frac{4L^3}{3}$

Justificación:

$$I_x = \int_0^L \int_0^L \int_0^L 2(y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx \; = 2\int_0^L \int_0^L (y^2 z + z^3/3)\Big|_0^L dy\,dx \; =$$

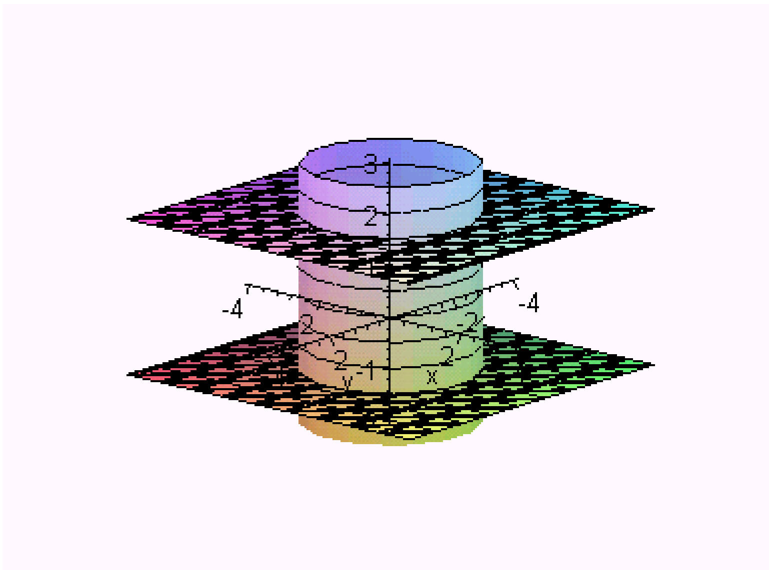
$$2\int_0^L \int_0^L (y^2 L + L^3/3)\,dy\,dx \; = 2\int_0^L (L\,y^3/3 + L^3/3\,y)\Big|_0^L \; dx \; =$$

$$2\int_0^L (\,L^4/3 + L^4/3\,)\; dx \; = 2\int_0^L (\,2L^4/3)\; dx \; = 2\,(\,2L^4/3)x\Big|_0^L \; =$$

$\frac{4L^5}{3} \neq \frac{4L^3}{3}$ ★

$g)$ __F__ $\int\int_E\int (x^2+y^2)\,dV = \pi\sqrt{3}$, donde E es la región acotada por el cilindro $x^2+y^2=4$ y los planos $z=-1$ y $z=2$.

Justificación:



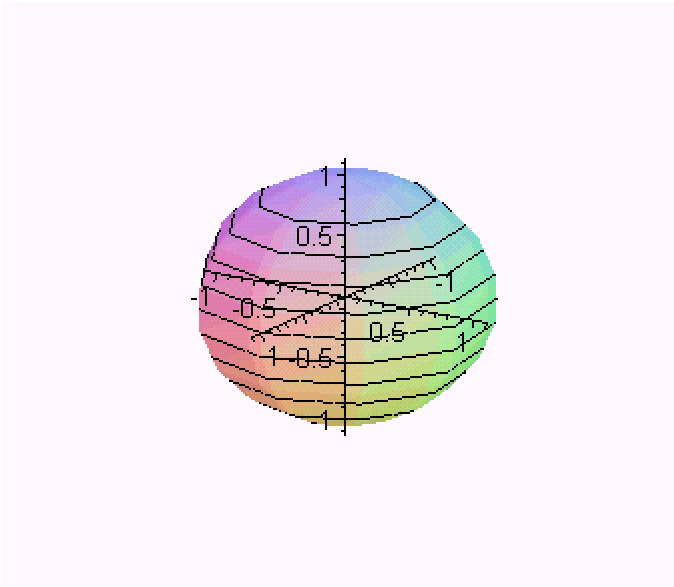
Usando coordenadas cilíndricas $x = r\,cos(\alpha)$, $y = r\,sen(\alpha)$, $z=z$, tenemos que :
$i)$ z se mueve entre -1 y 2.
$ii)$ $x^2+y^2=r^2=4 \Rightarrow r=2 \Rightarrow \alpha\in(0,2\pi\,]$

$$\int\int_E\int (x^2+y^2)\,dV = \int_{-1}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2)\,r\,dr\,d\alpha\,dz =$$

$$\int_{-1}^{2}\int_0^{2\pi}(r^4/4)\Big|_0^2\,d\alpha\,dz = 3\,(2\pi)\,4 = 24\pi \neq \pi\sqrt{3}\,★$$

$h)$ __V__ $\int\int_B\int (x^2+y^2+z^2)\,dV = \frac{4\pi}{5}$, donde B es la bola unitaria $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

Justificación:



Usando coordenadas esféricas

$x = \rho\, sen(\phi)\, cos(\theta),\ y = \rho\, sen(\phi)\, sen(\theta),\ z = \rho\, cos(\phi)$

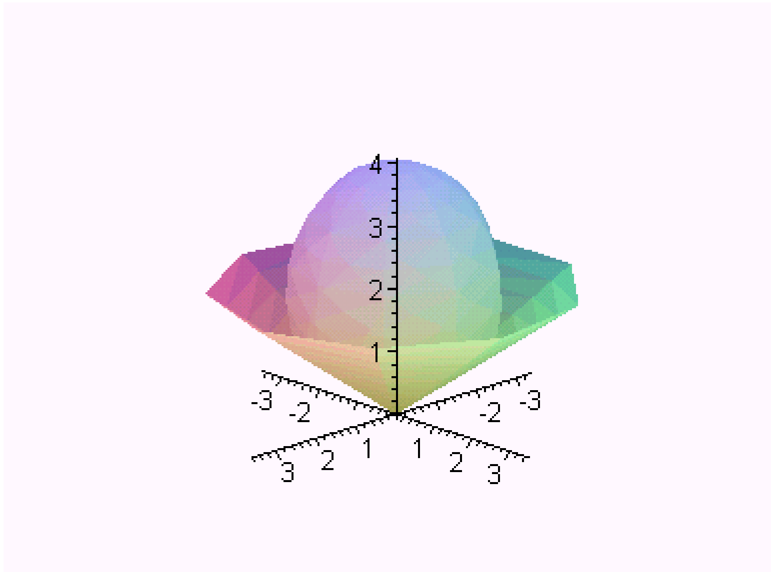
tenemos que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

$$\int\int_B\int\ (x^2 + y^2 + z^2)\, dV\ = \int_0^{\pi}\ \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\ \rho^4\, sen(\phi)\ d\rho\, d\theta\, d\phi\ =$$

$$2\pi\int_0^{\pi} sen(\phi)/5\; d\phi\ = 2\pi/5\,(\,-\,cos(\phi))\Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{5}\bigstar$$

$i)$ __F__ El volumen del sólido que cae arriba del cono $\phi = \frac{\pi}{3}$ y abajo de la esfera $\rho = 4\, cos\phi$ es 2.

Justificación:



Usando coordenadas esféricas, tenemos que :

$\rho = 4\, cos\phi \Rightarrow\ \rho^2 = 4\rho\, cos\phi \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4z \Rightarrow$

$x^2 + y^2 + (z^2 - 4z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

Por lo tanto, la esfera está centrada en $(0,0,2)$ y posee radio $2,$ luego

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{4cos(\phi)} \rho^2\, sen(\phi)\ d\rho\, d\phi\, d\theta\ =$

$2\pi \int_0^{\pi/3} sen(\phi)(64\, cos^3(\phi))/3\, d\phi = 32\pi \int_0^{\pi/3} sen(\phi)(4\, cos^3(\phi))/3\, d\phi =$

$32\,\pi\,(\,-\,cos^4(\phi))/3\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 10\pi \neq 2\bigstar$

(63 puntos).