UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS

PAUTA PRUEBA Nº 2
CÁLCULO III
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 50 MINUTOS FECHA : Mi 25/05/05
PROFESOR: *Juan Carlos Sandoval Avendaño*

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando TODAS sus respuestas**. Si corresponde puede dar un contraejemplo. Se le descontará 2 (dos) puntos por cada respuesta incorrecta o sin justificar.

$a)$ __F__ El dominio D de $f(x,y,z) = x^2 ln(x-y+z)$ es $D = \mathbb{R}^2$.

Justificación:
Como f es una función de 3 variables (x,y,z), el dominio debe ser un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y no de $\mathbb{R}^2$ como se señala. ★

$b)$ __F__ Las curvas de nivel de la función $f(x,y) = \frac{x}{y}$ es un conjunto de hipérbolas centradas en el origen.

Justificación:
La curvas de nivel son $f(x,y) = k$, es decir, $\frac{x}{y} = k$ ó $x = ky$ que es un conjunto de rectas y no de hipérbolas centradas en el origen. ★

$c)$ __F__ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = 0$

Justificación:
Considerando la trayectoria $y = 0$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(0)}{x^4+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Ahora, para la trayectoria $y = x^2$ se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(x^2)}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ no existe porque para dos trayectorias diferentes que pasan por el punto $(0,0)$ hemos obtenido valores distintos para el límite. ★

$d)$ __V__ La función $u(x,t) = a\,sen(x - at)$ satisface la ecuación de la onda.

Justificación:
La ecuación de la onda es $u_{tt} = a^2\,u_{xx}$
Ahora
$u_t = -a^2cos(x - at) \Rightarrow u_{tt} = -a^3sen(x - at)$
$u_x = a\,cos(x - at) \Rightarrow u_{xx} = -a\,sen(x - at)$
Por lo tanto, $a^2u_{xx} = -a^3sen(x - at) = u_{tt}$ ★

$e)$ __F__ El plano tangente a la superficie $z = x^2 + 4y^2$ en el punto $(2,1,8)$ es $x + 4y - z = 4$

Justificación:
El plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es :

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y - y_0) \qquad (1)$$

Recuerde que el plano tangente a la superficie de nivel $F(x,y,z) = k$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es :

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)\,(y - y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)\,(z - z_0) = 0$$

Podemos obtener la ecuación (1) a partir de la anterior haciendo $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0.$

Dado que $z = f(x,y)$, tenemos que $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, luego

$f_x = 2x \Rightarrow f_x(2,1) = 4$

$f_y = 8y \Rightarrow f_y(2,1) = 8$

Reemplazando en (1) :
$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y - y_0) \Rightarrow$

$z - 8 = 4(x - 2) + 8(y - 1) \Rightarrow z = 8 + 4x - 8 + 8y - 8 \Rightarrow$

$4x + 8y - z = 8 \neq x + 4y - z = 4$ ★

$f)$ __F__ Sea f una función de dos variables que posee derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(1,7)$ y $D(6,15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 5 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 6. Entonces la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$ es $\frac{127}{15}$

Justificación:
Tenemos que :

$\overrightarrow{AB} = <3-1, 3-3> = <2,0>$ y el vector unitario asociado es $\boldsymbol{u} = \frac{<2,0>}{\|<2,0>\|} = \frac{<2,0>}{\sqrt{2^2+0^2}} = \frac{<2,0>}{\sqrt{2^2}} = \frac{<2,0>}{2} = <1,0> = \boldsymbol{i}$

$\overrightarrow{AC} = <1-1, 7-3> = <0,4>$ y el vector unitario asociado es $\boldsymbol{w} = \frac{<0,4>}{\|<0,4>\|} = \frac{<0,4>}{4} = <0,1> = \boldsymbol{j}$

$\overrightarrow{AD} = <6-1, 15-3> = <5,12>$ y el vector unitario asociado es $\boldsymbol{z} = \frac{<5,12>}{\|<5,12>\|} = \frac{<5,12>}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{<5,12>}{\sqrt{169}} = \frac{<5,12>}{13} = <\frac{5}{13}, \frac{12}{13}>$

Por otro lado,

$D_{\boldsymbol{u}}f(1,3) = f_x(1,3)\ \cdot 1 + f_y(1,3)\cdot 0 = f_x(1,3) = 5$
$D_{\boldsymbol{w}}f(1,3) = f_x(1,3)\ \cdot 0 + f_y(1,3)\cdot 1 = f_y(1,3) = 6$

Luego,

$D_{\boldsymbol{z}}f(1,3) = f_x(1,3)\ \cdot \frac{5}{13} + f_y(1,3)\cdot \frac{12}{13} = 5\cdot\frac{5}{13} + 6\cdot\frac{12}{13} = \frac{97}{13} \neq \frac{127}{15}$★

(30 puntos).

(2) Si $z = f(x,y)$, donde $x = r\,cos(\theta)$, $y = r\,sen(\theta)$ muestre que

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r}$

(10 puntos).

<u>Solución:</u>

Debemos probar que :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r}$$

es decir

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r^2}\,z_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\,z_r$$

Tenemos que :

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}cos(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}sen(\theta) \Rightarrow$$

$$z_r = z_x cos(\theta) + z_y sen(\theta) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = z_x(-rsen(\theta)) + z_y(rcos(\theta)) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\, z_x sen(\theta) + r\, z_y\, cos(\theta) \qquad (2)$$

Derivando (1) con respecto a r :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = cos(\theta)\, \left[\frac{\partial z_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right] + sen(\theta)\left[\frac{\partial z_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right] =$$

$$cos(\theta)\, \Big[z_{xx}\, cos(\theta) + z_{yx} sen(\theta)\Big] + sen(\theta)\, \Big[z_{xy} cos(\theta) + z_{yy} sen(\theta)\Big] =$$

$$z_{xx} cos^2(\theta) + z_{yx} sen(\theta)cos(\theta) + z_{xy} sen(\theta)cos(\theta) + z_{yy} sen^2(\theta) \stackrel{z\, continua}{=}$$

$$z_{xx} cos^2(\theta) + 2z_{xy} sen(\theta)cos(\theta) + z_{yy} sen^2(\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = z_{xx} cos^2(\theta) + 2z_{xy} sen(\theta)cos(\theta) + z_{yy} sen^2(\theta) \qquad (3)$$

Derivando (2) con respecto a θ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial\left[-r\frac{\partial z}{\partial x}sen(\theta) + r\frac{\partial z}{\partial y}cos(\theta)\right]}{\partial \theta} = -r\,\frac{\partial\left[\frac{\partial z}{\partial x}sen(\theta)\right]}{\partial \theta} + r\frac{\partial\left[\frac{\partial z}{\partial y}cos(\theta)\right]}{\partial \theta} =$$

$$-r\,\frac{\partial\left[z_x\, sen(\theta)\right]}{\partial \theta} + r\frac{\partial\left[z_y\, cos(\theta)\right]}{\partial \theta} =$$

$$-r\left[\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)sen(\theta) + z_x cos(\theta)\right] +$$

$$r\left[\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)cos(\theta) - z_y\, sen(\theta)\right] =$$

$$-r\left[\Big(z_{xx}\big(-rsen(\theta)\big) + z_{yx}\big(r\, cos(\theta)\big)\Big)sen(\theta) + z_x cos(\theta)\right] +$$

$$r\left[\Big(z_{xy}\big(-rsen(\theta)\big) + z_{yy}\big(r\, cos(\theta)\big)\Big)cos(\theta) - z_y\, sen(\theta)\right] =$$

$$r^2 sen^2(\theta)\, z_{xx} - r^2\, sen(\theta)cos(\theta)\, z_{yx} - r\, cos(\theta)\, z_x$$

$$- r^2 sen(\theta) cos(\theta) z_{xy} + r^2 cos^2(\theta) z_{yy} - r\, sen(\theta)\, z_y \ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = r^2 sen^2(\theta)\, z_{xx} - r^2\, sen(\theta) cos(\theta)\, z_{yx} - r\, cos(\theta)\, z_x$$

$$- r^2 sen(\theta) cos(\theta) z_{xy} + r^2 cos^2(\theta) z_{yy} - r\, sen(\theta)\, z_y \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = r^2 sen^2(\theta)\, z_{xx} - r\, cos(\theta)\, z_x - r\, sen(\theta)\, z_y -$$

$$2r^2 sen(\theta) cos(\theta) z_{xy} + r^2 cos^2(\theta) z_{yy}$$

Así

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r} = z_{xx} cos^2(\theta) + 2 z_{xy} sen(\theta) cos(\theta) + z_{yy} sen^2(\theta) +$$

$$\frac{1}{r^2}\left[r^2 sen^2(\theta)\, z_{xx} - r\, cos(\theta)\, z_x - r\, sen(\theta)\, z_y - \right.$$

$$\left. 2r^2 sen(\theta) cos(\theta) z_{xy} + r^2 cos^2(\theta) z_{yy} \right] +$$

$$\frac{1}{r}\left[z_x cos(\theta) + z_y sen(\theta) \right] =$$

$$z_{xx} cos^2(\theta) + 2 z_{xy} sen(\theta) cos(\theta) + z_{yy} sen^2(\theta) + sen^2(\theta)\, z_{xx} + cos^2(\theta) z_{yy}$$

$$- 2 z_{xy} sen(\theta) cos(\theta) - \frac{1}{r}\, z_x cos(\theta) - \frac{1}{r} z_y sen(\theta) + \frac{1}{r}\, z_x cos(\theta) + \frac{1}{r} z_y sen(\theta) =$$

$$z_{xx} cos^2(\theta) + sen^2(\theta)\, z_{xx} + z_{yy} sen^2(\theta) + cos^2(\theta) z_{yy}$$

$$= z_{xx}\left(cos^2(\theta) + sen^2(\theta)\right) + z_{yy}\left(sen^2(\theta) + cos^2(\theta)\right) = z_{xx} + z_{yy}$$

$$\therefore\ z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r^2}\, z_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\, z_r \ \square$$

(3)

$a)$ Obtenga los valores extremos para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

(10 puntos).

Solución:

En este caso $\quad f(x, y) = x^2 - y^2$

y la restricción es $\quad g(x, y) = x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$

Luego:

$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \ < f_x, f_y > \ = \lambda < g_x, g_y > \ \Rightarrow$

$< 2x, \ -2y > \ = \lambda < 2x, 2y > \ \Rightarrow \ < 2x, \ -2y > \ = \ < 2\lambda x, 2\lambda y > \ \Rightarrow$

$2x = 2\lambda x \Rightarrow 2x(1-\lambda) = 0 \Rightarrow x = 0 \ \vee \ \lambda = 1$

$-2y = 2\lambda y \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2)$

Caso 1 : $x = 0 \ \Rightarrow^{(1)} 0^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \ \Rightarrow^{(2)} \lambda = \ -1$

En este caso los puntos críticos son : $P_1(0,1)$ y $P_2(0, \ -1)$

Caso 2 : $\lambda = 1 \Rightarrow^{(2)} \ -2y = 2y \Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow^{(1)} x^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

En este caso los puntos críticos son : $P_3(1,0)$ y $P_4(-1,0)$

Por otro lado, para saber si los puntos críticos obtenidos son de máximo o de mínimo basta evaluar la función en cada uno de los puntos y el mayor valor estará asociado con el punto de máximo y el menor valor con el punto de mínimo.

$f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow f(0,1) = 0^2 - 1^2 = \ -1$
$f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow f(0, \ -1) = 0^2 - (-1)^2 = \ -1$
$f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow f(1,0) = 1^2 - 0^2 = 1$
$f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow f(-1,0) = (-1)^2 - 0^2 = 1$

Por lo tanto, los puntos de máximo son $P_3(1,0)$ y $P_4(-1,0)$, y los puntos de mínimo $P_1(0,1)$ y $P_2(0, \ -1)$ ❑

$b)$ Obtenga la menor distancia desde el punto $(1, 0, \ -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$ **(10 puntos).**

Solución:

La distancia de un punto (x,y,z) al punto $(1,0, \ -2)$ es :

$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2} \qquad\qquad\qquad\qquad (*)$

Pero en este problema el punto (x,y,z) pertenece al plano $x + 2y + z = 4$, es decir, $z = 4 - x - 2y$; y reemplazando en $(*)$:

$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (4 - x - 2y + 2)^2} \ = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$

Por otro lado, recordemos que minimizar d es equivalente a minimizar d^2, luego minimizaremos

$d^2 = f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$

Ahora

$f_x = 2(x-1) + 2(6-x-2y)(-1) = 2x-2-2(6-x-2y) =$

$2x-2-12+2x+4y \Rightarrow\ f_x = 4x+4y-14$

$f_y = 2y + 2(6-x-2y)(-2) = 2y-4(6-x-2y) = 2y-24+4x+8y \Rightarrow$

$f_y = 10y+4x-24$

Igualando a cero las derivadas parciales :

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 0 \Rightarrow 4x+4y-14 = 0 \Rightarrow 4x+4y = 14 \\ f_y = 0 \Rightarrow 10y+4x-24 = 0 \Rightarrow 4x+10y = 24 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$6y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{6} \Rightarrow y = \frac{5}{3}$

De $4x+4y = 14$ se tiene que :

$4x = 14 - \frac{20}{3} \Rightarrow 4x = \frac{22}{3} \Rightarrow x = \frac{22}{12} \Rightarrow x = \frac{11}{6}$

Por lo tanto, el único punto crítico es : $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$

Verifiquemos si es punto de mínimo como queremos.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) & f_{xy}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) \\ f_{yx}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) & f_{yy}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 40-16 = 24 > 0$$

y $f_{xx}\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) = 4 > 0$

De lo anterior, concluimos que $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$ es punto de mínimo, y la menor distancia desde el punto $(1,0,-2)$ al plano $x+2y+z=4$ es :

$d\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) = \sqrt{\left(\frac{11}{6}-1\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(4-\frac{11}{6}-2\left(\frac{5}{3}\right)+2\right)^2} =$

$\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$ ❑