

PAUTA PRUEBA N° 1 CÁLCULO III
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

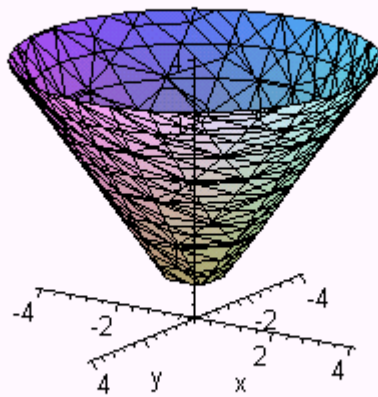
NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 50 MINUTOS **FECHA : Mi 06/04/05**
PROFESOR: *Juan Carlos Sandoval Avendaño*

1) Dibuje la región acotada por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$, y $z = 4$.

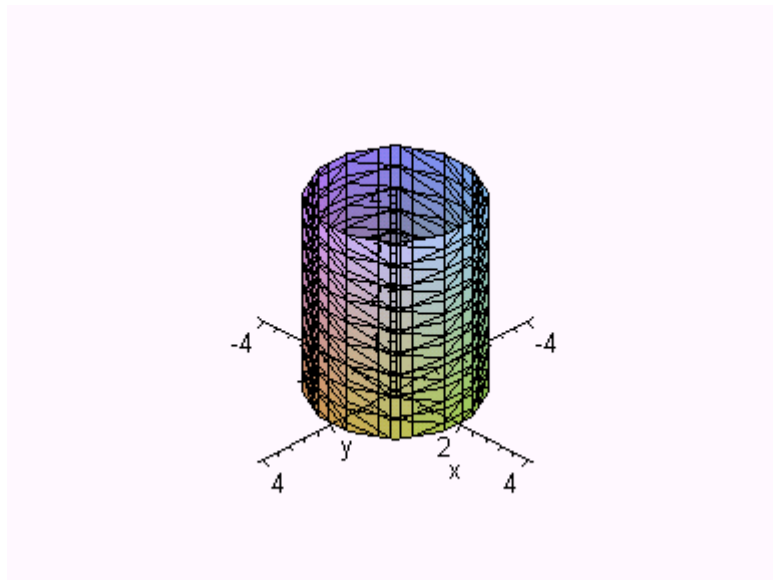
(10 puntos).

Solución:

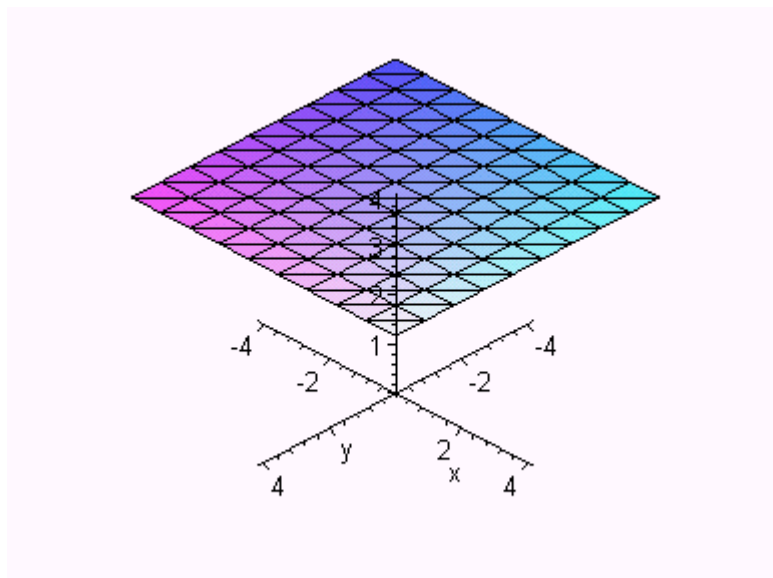
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa la parte superior de un cono



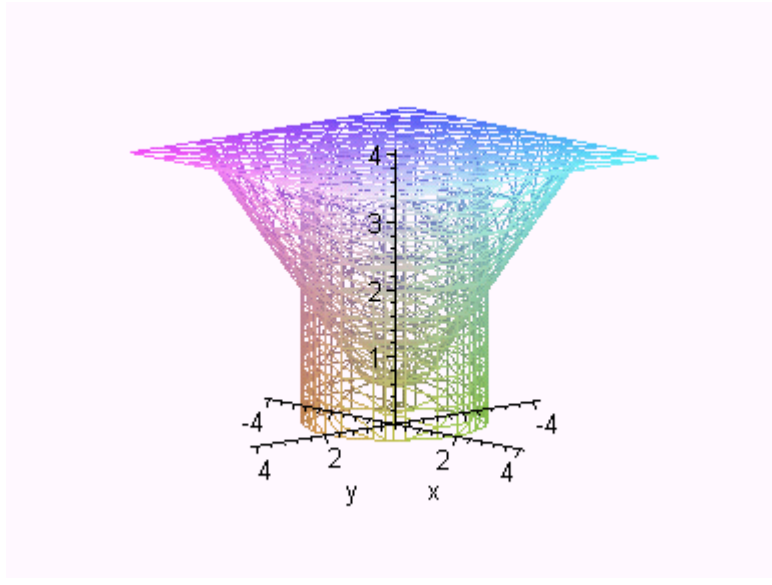
La superficie $x^2 + y^2 = 4$ representa un cilindro.



La superficie $z = 4$ representa un plano paralelo al plano xy :



Si juntamos las tres gráficas en una sola obtenemos :



2) Obtenga una ecuación para la superficie que consta de todos los puntos que son equidistantes del punto $(1, 0, 0)$ y el plano $x = -1$. Identifique y dibuje la superficie.

(10 puntos).

Solución:

Sean $P = (x, y, z)$ un punto cualesquiera de la superficie buscada, $A = (1, 0, 0)$ el punto dado y $\pi : x = -1$ el plano dado.

Tenemos, de acuerdo al enunciado que :

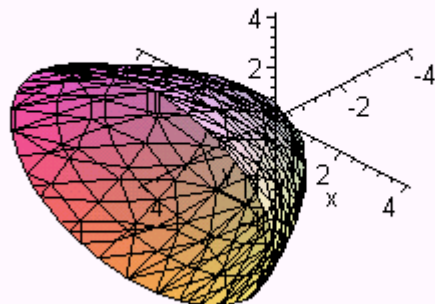
$$d(P, A) = d(P, \pi) \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \frac{|x+1|}{\sqrt{1^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = |x+1| \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = (x+1)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y^2 + z^2 = 4x \Rightarrow \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = x \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2} = x$$

La superficie obtenida es por lo tanto un paraboloide circular con vértice en el origen, eje igual al eje x .



3)

a) Obtenga el ángulo entre la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$, y el plano que pasa por los puntos $(1, 2, 3)$, $(4, 1, 5)$ y $(2, 0, 6)$.

b) Determine cuál es la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, -1)$ y $(-1, 2, 1)$, y es paralelo a la recta de intersección de los planos $3x + y - 2z = 6$ y $4x - y + 3z = 0$.

(20 puntos).

Solución:

a) Para calcular el ángulo α entre una recta y un plano necesitamos el vector director $\mathbf{r}$ de la recta y el vector normal $\mathbf{n}$ del plano. En efecto,

$$90 - \alpha = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \Rightarrow \alpha = 90 - \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n})$$

Sean $P_1 = (0, 0, 0)$ y $P_2 = (1, 1, 1)$ los puntos por los que pasa la recta.

Sean $P_3 = (1, 2, 3)$, $P_4 = (4, 1, 5)$ y $P_5 = (2, 0, 6)$ los puntos por los que pasa el plano.

Obtengamos, en primer lugar, el vector director de la recta.

El vector director de la recta es

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \langle 1 - 0, 1 - 0, 1 - 0 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

Obtengamos, ahora, el vector normal del plano.

Los vectores

$$\overrightarrow{P_4P_3} = \langle 4-1, 1-2, 5-3 \rangle = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

y

$$\overrightarrow{P_4P_5} = \langle 4-2, 1-0, 5-6 \rangle = \langle 2, 1, -1 \rangle$$

pertenecen al plano y los usaremos para calcular el vector normal. En efecto,

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \langle -1, 7, 5 \rangle$$

Ahora,

$$\cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{n})) = \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{r}\| \|\mathbf{n}\|} = \frac{\langle \langle 1, 1, 1 \rangle, \langle -1, 7, 5 \rangle \rangle}{\|\langle 1, 1, 1 \rangle\| \|\langle -1, 7, 5 \rangle\|} = \frac{-1+7+5}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \sqrt{(-1)^2+7^2+5^2}} =$$

$$\frac{11}{\sqrt{3}\sqrt{75}} = \frac{11}{\sqrt{225}} = \frac{11}{15} \Rightarrow \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \text{Arccos}\left(\frac{11}{15}\right) \Rightarrow \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \approx 42^\circ 50'$$

Finalmente, el ángulo α entre la recta y el plano es :

$$\alpha = 90 - \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \Rightarrow \alpha \approx 90 - 42^\circ 50' \Rightarrow \alpha \approx 47^\circ 10' \star$$

b) Sean $\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ el plano buscado,
 $P_1 = (1, 0, -1)$ y $P_2 = (-1, 2, 1)$.

$$\text{Sean } \pi_1 : 3x + y - 2z = 6 \text{ y } \pi_2 : 4x - y + 3z = 0.$$

Si sumamos las ecuaciones de los planos :

$$7x + z = 6 \Rightarrow x = \frac{z-6}{-7}$$

Ahora si realizamos la operación siguiente con los planos : $3\pi_1 + 2\pi_2$

$$9x + 3y - 6z = 18$$

$$8x - 2y + 6z = 0$$

Sumando las ecuaciones anteriores :

$$17x + y = 18 \Rightarrow 17x = 18 - y \Rightarrow x = \frac{18-y}{17} \Rightarrow x = \frac{y-18}{-17}$$

Por lo tanto, las ecuaciones simétricas de la recta de intersección son :

$$\frac{x}{1} = \frac{y-18}{-17} = \frac{z-6}{-7}$$

Observamos que el vector director de la recta es : $\mathbf{r} = \langle 1, -17, -7 \rangle$

Note que podríamos haber obtenido el vector director de la recta de intersección calculando el producto cruz entre los vectores normales de cada uno de los planos, es decir,

$$\mathbf{r} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \langle 1, -17, -7 \rangle$$

donde $\mathbf{n}_1$ es el vector normal del plano π_1 y $\mathbf{n}_2$ es el vector normal del plano π_2 .

Por otro lado, el vector $\overrightarrow{P_1 P_2} = \langle -2, 2, 2 \rangle$ está contenido en el plano buscado; falta un vector adicional, contenido también en el mismo plano, para calcular el vector normal.

Ahora, podemos desplazar el vector director de la recta en forma paralela a sí mismo hasta alcanzar el plano, pues el plano que buscamos es paralelo a la recta de intersección. Luego, podemos tomar este vector director y usarlo para generar el vector normal al plano buscado.

Así,

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{P_1 P_2} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -17 & -7 \end{vmatrix} = \langle 20, -12, 32 \rangle$$

Finalmente, reemplazando las componentes del vector normal $\mathbf{n}$ recién calculado y las componentes del punto del plano $P_1 = (1, 0, -1)$ obtenemos :

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$20(x - 1) - 12(y - 0) + 32(z + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$20x - 20 - 12y + 32z + 32 = 0 \Rightarrow 20x - 12y + 32z = -12 \Rightarrow$$

$$5x - 3y + 8z = -3 \quad \square$$

4) La función posición de una partícula está dada por:

$$\vec{f}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 2t \rangle$$

a) Calcule la velocidad y la aceleración de la partícula.

b) ¿Para qué valor de t la rapidez es mínima? (rapidez = $\|\vec{v}(t)\|$).

c) Calcule la curvatura en el punto $(4, 10, 0)$.

d) Dibuje el vector aceleración en el punto $(1, 5, -1)$.

(10 puntos).

Solución:

$$a) \vec{v}(t) = \vec{f}'(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 2t \rangle' = \langle 2t, 5, 2t - 2 \rangle$$

$$\vec{a}(t) = \vec{f}''(t) \Rightarrow \vec{a}(t) = \langle 2t, 5, 2t - 2 \rangle' = \langle 2, 0, 2 \rangle \star$$

b) Sea R = rapidez

$$R = \|\vec{v}(t)\| \Rightarrow R = \|\langle 2t, 5, 2t - 2 \rangle\| \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{(2t)^2 + 5^2 + (2t - 2)^2} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{4t^2 + 25 + 4t^2 - 8t + 4} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt{8t^2 - 8t + 29} \Rightarrow R' = \frac{1}{2} (8t^2 - 8t + 29)^{-1/2} (16t - 8) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{16t - 8}{2\sqrt{8t^2 - 8t + 29}} = 0 \Rightarrow 16t - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{8}{16} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Note que $R' > 0$ para $t > \frac{1}{2}$ y $R' < 0$ para $t < \frac{1}{2}$, es decir, R es decreciente antes de $t = \frac{1}{2}$ y creciente después de $t = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $t = \frac{1}{2}$ es un punto de mínimo.

Además observe que $8t^2 - 8t + 29$ siempre es positiva.

La rapidez es mínima para $t = \frac{1}{2} \star$

c) Note que para el punto $(4, 10, 0)$ se tiene :

$$t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$$

$$5t = 10 \Rightarrow t = 2$$

$$t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = 2$$

Por lo tanto, el valor del parámetro debe ser $t = 2$, pues deben satisfacerse las tres condiciones anteriores.

Calculemos, por tanto, la curvatura en $t = 2$:

Recordemos que la curvatura está dada por :

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\|}{\|\vec{f}'(t)\|^3}$$

$$\vec{f}'(t) = \langle 2t, 5, 2t - 2 \rangle \Rightarrow$$

$$\vec{f}'(t=2) = \langle 2(2), 5, 2(2) - 2 \rangle = \langle 4, 5, 2 \rangle$$

$$\vec{f}''(t) = \langle 2, 0, 2 \rangle \Rightarrow \vec{f}''(t=2) = \langle 2, 0, 2 \rangle$$

Así,

$$\vec{f}'(2) \times \vec{f}''(2) =$$

$$\langle 4, 5, 2 \rangle \times \langle 2, 0, 2 \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \langle 10, -4, -10 \rangle$$

$$\begin{aligned} \|\vec{f}'(t=2) \times \vec{f}''(t=2)\| &= \|\langle 10, -4, -10 \rangle\| = \sqrt{10^2 + (-4)^2 + (-10)^2} \\ &= \sqrt{216} \end{aligned}$$

$$\|\vec{f}'(t=2)\| = \sqrt{8(2)^2 - 8(2) + 29} = \sqrt{45} \Rightarrow \|\vec{f}'(t=2)\|^3 = \sqrt{91125}$$

$$\therefore \kappa(t=2) = \frac{\|\vec{f}'(t=2) \times \vec{f}''(t=2)\|}{\|\vec{f}'(t=2)\|^3} = \frac{\sqrt{216}}{\sqrt{91125}} \approx 0.0487 \star$$

d) En el punto $(1, 5, -1)$ se tiene que :

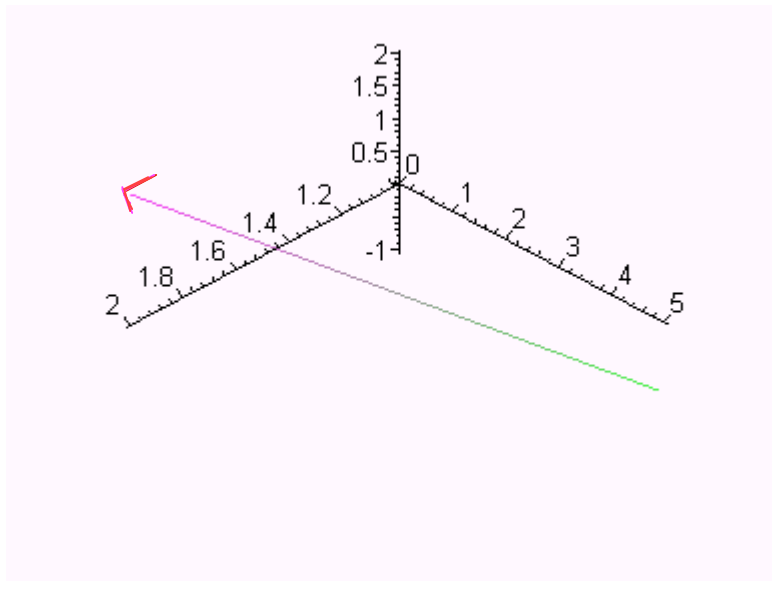
$$t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

$$5t = 5 \Rightarrow t = 1$$

$$t^2 - 2t = -1 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Por lo tanto, el valor del parámetro t es para este punto igual a 1.

$$\vec{a}(t) = \langle 2, 0, 2 \rangle \Rightarrow \vec{a}(1) = \langle 2, 0, 2 \rangle$$



5) Obtenga el dominio y la primera derivada de $\vec{g}(t) = \frac{t\mathbf{a}}{\|t\mathbf{a}\|} \times (\mathbf{b} + t\mathbf{c})$, con $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$.

(10 puntos).

Solución:

Notemos que $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ son vectores constantes. El único punto de conflicto es $t = 0$, pues en ese caso se indetermina el cuociente $\frac{t\mathbf{a}}{\|t\mathbf{a}\|}$ (Recuerde que $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\|\mathbf{0}\| = 0$). Por lo tanto, el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Sean $\mathbf{u}(t) = \frac{t\mathbf{a}}{\|t\mathbf{a}\|}$ y $\mathbf{v}(t) = (\mathbf{b} + t\mathbf{c})$. Luego,

$$\mathbf{u}'(t) = \left(\frac{t\mathbf{a}}{\|t\mathbf{a}\|} \right)' = \left(\frac{1}{\|t\mathbf{a}\|} \right)' (t\mathbf{a}) + \frac{1}{\|t\mathbf{a}\|} (t\mathbf{a})' =$$

$$\left(\frac{1}{\langle t\mathbf{a}, t\mathbf{a} \rangle^{1/2}} \right)' (t\mathbf{a}) + \frac{1}{\|t\mathbf{a}\|} \mathbf{a} = \left(\langle t\mathbf{a}, t\mathbf{a} \rangle^{-1/2} \right)' (t\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{a}}{\|t\mathbf{a}\|} =$$

$$\left[-\frac{1}{2} \langle t\mathbf{a}, t\mathbf{a} \rangle^{-3/2} \langle t\mathbf{a}, t\mathbf{a} \rangle' \right] (t\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{a}}{\|t\mathbf{a}\|} =$$

$$\left[-\frac{1}{2} \langle t\mathbf{a}, t\mathbf{a} \rangle^{-3/2} (\langle (t\mathbf{a})', t\mathbf{a} \rangle + \langle t\mathbf{a}, (t\mathbf{a})' \rangle) \right] (t\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{a}}{\|t\mathbf{a}\|} =$$

$$\left[-\frac{1}{2} \langle t\mathbf{a}, t\mathbf{a} \rangle^{-3/2} (\langle \mathbf{a}, t\mathbf{a} \rangle + \langle t\mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle) \right] (t\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{a}}{\|t\mathbf{a}\|} =$$

$$\left[-\frac{1}{2} \langle t \mathbf{a}, t \mathbf{a} \rangle^{-3/2} 2 \langle \mathbf{a}, t \mathbf{a} \rangle \right] (t \mathbf{a}) + \frac{\mathbf{a}}{\|t \mathbf{a}\|} = -\frac{\langle \mathbf{a}, t \mathbf{a} \rangle (t \mathbf{a})}{\langle t \mathbf{a}, t \mathbf{a} \rangle^{3/2}} + \frac{\mathbf{a}}{\|t \mathbf{a}\|}$$

Por otro lado, $\mathbf{v}'(t) = (\mathbf{b} + t \mathbf{c})' = \mathbf{b}' + (t \mathbf{c})' = \theta + \mathbf{c} = \mathbf{c}$

$$\therefore \left[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t) \right]' = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t) =$$

$$\left[-\frac{\langle \mathbf{a}, t \mathbf{a} \rangle (t \mathbf{a})}{\langle t \mathbf{a}, t \mathbf{a} \rangle^{3/2}} + \frac{\mathbf{a}}{\|t \mathbf{a}\|} \right] \times (\mathbf{b} + t \mathbf{c}) + \frac{t \mathbf{a}}{\|t \mathbf{a}\|} \times \mathbf{c} \quad \square$$