

EJERCICIOS RESUELTOS DE CÁLCULO III

1 Determine la ecuación del plano que pasa a través de la recta de intersección de los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$, y que pasa además por el punto $(-1, 2, 1)$.

Solución:

Sea $\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ el plano buscado.

Obtengamos en primer lugar la recta de intersección de los planos

$$x + y - z = 2 \quad (1)$$

$$2x - y + 3z = 1 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) :

$$3x + 2z = 3 \Rightarrow 2z = 3 - 3x \Rightarrow z = \frac{3-3x}{2} \Rightarrow z = \frac{3x-3}{-2} \Rightarrow z = \frac{3(x-1)}{-2} \Rightarrow \frac{z}{3} = \frac{x-1}{-2}$$

Ahora, $-2 \text{ ec. (1)} + \text{ec. (2)}$:

$$-3y + 5z = -3 \Rightarrow 5z = -3 + 3y \Rightarrow 5z = 3(y - 1) \Rightarrow \frac{z}{3} = \frac{y-1}{5}$$

Igualando las expresiones obtenidas, se concluye que las ecuaciones simétricas de la recta de intersección de los planos dados es :

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}$$

Notemos que el vector director de la recta es $\mathbf{r} = \langle -2, 5, 3 \rangle$ y además tenemos que $\mathbf{r} \in \pi$.

Falta obtener un vector adicional del plano buscado para calcular su normal. Para ello nos daremos un punto de la recta y con el punto dado $A = (-1, 2, 1)$ generaremos el vector faltante.

$$z = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } y = 1$$

Por lo tanto, $P = (1, 1, 0)$ pertenece a la recta y además

Ejercicios resueltos de Cálculo III

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PA} = \langle 2, -1, -1 \rangle \in \pi$$

Calculemos el vector normal del plano buscado.

$$\langle a, b, c \rangle = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \langle -2, 4, -8 \rangle$$

Finalmente, considerando $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 1)$, la ecuación del plano buscado será :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$-2(x + 1) + 4(y - 2) - 8(z - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$-2x - 2 + 4y - 8 - 8z + 8 = 0 \Rightarrow -2x + 4y - 8z = 2 \Rightarrow :2$$

$$-x + 2y - 4z = 1 \Rightarrow x - 2y + 4z = -1.$$

$$\therefore \pi : x - 2y + 4z = -1 \quad \square$$

2 Si $z = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ pruebe que $yz_x + xz_y = 0$; $(x, y) \neq (0, 0)$

Solución:

$$\text{Sean } u = x^2 - y^2, \quad v = y^2 - x^2$$

$$\text{Luego } z = f(u, v), \quad u_x = 2x, \quad u_y = -2y, \quad v_x = -2x, \quad v_y = 2y$$

Derivando con respecto a x , usando la regla de la cadena, tenemos:

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x = f_u 2x + f_v (-2x) = 2x(f_u - f_v) \Rightarrow$$

$$yz_x = 2xy(f_u - f_v) \quad (1)$$

Derivando con respecto a y , usando la regla de la cadena, tenemos:

$$z_y = f_u u_y + f_v v_y = f_u (-2y) + f_v (2y) = 2y(-f_u + f_v) \Rightarrow$$

$$xz_y = 2xy(-f_u + f_v) \quad (2)$$

Por lo tanto, sumando las ecuaciones (1) y (2) :

$$yz_x + xz_y = 2xy(f_u - f_v) + 2xy(-f_u + f_v) = 2xy(f_u - f_v - f_u + f_v) =$$

$$2xy(0) = 0 \Rightarrow yz_x + xz_y = 0 \quad \square$$

Ejercicios resueltos de Cálculo III

3 Use Multiplicadores de Lagrange para obtener los valores extremos de $f(x, y) = xy$ bajo la restricción $9x^2 + y^2 = 4$

Solución:

Tenemos que $f(x, y) = xy$ y $g(x, y) = 9x^2 + y^2 = 4$

Por lo tanto,

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\lambda \nabla g = \lambda \langle g_x, g_y \rangle = \lambda \langle 18x, 2y \rangle = \langle 18\lambda x, 2\lambda y \rangle$$

Entonces de $\nabla f = \lambda \nabla g$ se tiene :

$$y = 18\lambda x \quad (1)$$

$$x = 2\lambda y \quad (2)$$

Le adicionamos la restricción:

$$9x^2 + y^2 = 4 \quad (3)$$

Reemplazando (1) en (2) :

$$x = 2\lambda(18\lambda x) \Rightarrow x - 36\lambda^2 x = 0 \Rightarrow x(1 - 36\lambda^2) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \vee (1 - 36\lambda^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = \pm \frac{1}{6}$$

Caso 1 : $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$

Pero la restricción nos dice que $9x^2 + y^2 = 4$ lo que no se cumple en el punto $(0, 0)$, pues $9(0)^2 + 0^2 = 0 \neq 4$

Caso 2 : $\lambda = \frac{1}{6} \Rightarrow (1) y = 3x \Rightarrow (3) 9x^2 + (3x)^2 = 4 \Rightarrow 9x^2 + 9x^2 = 4 \Rightarrow$

$$18x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{18} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Observe que el caso $\lambda = -\frac{1}{6}$ entrega las mismas soluciones que $\lambda = \frac{1}{6}$.

$$\text{Ahora, } y = 3x \Rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = \pm \sqrt{2}$$

Luego los puntos críticos son :

Ejercicios resueltos de Cálculo III

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right); P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right); P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right) \\ ; P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right)$$

Evaluemos en la función para saber cuáles son los puntos de máximo y cuáles son los de mínimo.

$$f(x, y) = xy \Rightarrow f(P_1) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$f(x, y) = xy \Rightarrow f(P_2) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$f(x, y) = xy \Rightarrow f(P_3) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$f(x, y) = xy \Rightarrow f(P_4) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}$$

De lo anterior concluimos que P_1 y P_4 son puntos de máximo y P_2 y P_3 puntos de mínimo.

El valor máximo de f bajo la restricción dada es $\frac{2}{3}$ y el valor mínimo es $-\frac{2}{3}$ $\square$

4 Calcule el área superficial de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que cae dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y arriba del plano xy .

Solución:

Recordemos que el área de la superficie $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde f_x y f_y son continuas, es :

$$A(S) = \int_D \int \sqrt{\left[f_x(x, y)\right]^2 + \left[f_y(x, y)\right]^2 + 1} \, dA$$

En este caso $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, luego

$$f_x(x, y) = -x(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$$

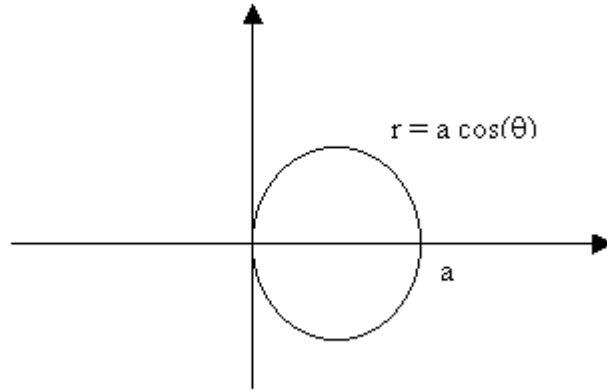
$$f_y(x, y) = -y(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}$$

Notemos que el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ está dado por:

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow (x^2 - ax) + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

Luego, es un cilindro con centro en $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y de radio $\frac{a}{2}$.

Ejercicios resueltos de Cálculo III



Por lo tanto,

$$A(S) = \int_D \int \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} \, dA =$$

$$\int_D \int \sqrt{\left[-x(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}\right]^2 + \left[-y(a^2 - x^2 - y^2)^{-1/2}\right]^2 + 1} \, dA =$$

$$\int_D \int \sqrt{\left[(x^2 + y^2)/(a^2 - x^2 - y^2)\right] + 1} \, dA =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos(\theta)} \sqrt{\left[r^2/(a^2 - r^2)\right] + 1} \, r \, dr \, d\theta =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos(\theta)} \sqrt{\frac{r^2}{a^2 - r^2} + 1} \, r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos(\theta)} \sqrt{\frac{r^2 + a^2 - r^2}{a^2 - r^2}} \, r \, dr \, d\theta =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos(\theta)} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - r^2}} \, r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos(\theta)} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \, d\theta =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-a \sqrt{a^2 - r^2}\right) \Big|_0^{a \cos(\theta)} \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -a \left(\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2(\theta)} - a\right) \, d\theta =$$

$$2a^2 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}\right) \, d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/2} d\theta - 2a^2 \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \, d\theta =$$

$$a^2 \pi - 2a^2 (-\cos(\theta)) \Big|_0^{\pi/2} = a^2 \pi - 2a^2 = a^2(\pi - 2) \quad \square$$