

LISTADO N° 4 DE EJERCICIOS DE CÁLCULO III

1 Obtenga la derivada direccional de $f(x, y) = x^2y^3 + 2x^4y$, en el punto $(1, -2)$ y en la dirección dada por el ángulo $\alpha = \pi/3$. $(R : 7\sqrt{3} - 16)$

2 Para la función $f(x, y, z) = xy^2z^3$

a) obtenga el gradiente de f

b) evalúe el gradiente en el punto $P = (1, -2, 1)$

c) calcule la tasa de cambio de f en el punto P en la dirección del vector $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$ $(R : 20\sqrt{3})$

3 Obtenga la derivada direccional de la función $f(x, y) = \sqrt{x-y}$ en el punto $(5, 1)$ en la dirección $\mathbf{v} = \langle 12, 5 \rangle$. $(R : \frac{7}{52})$

4 Calcule la tasa máxima de cambio y la dirección en la que ocurre para la función $f(x, y) = \cos(3x + 2y)$ en el punto $(\pi/6, -\pi/8)$.

5 a) Muestre que una función f diferenciable decrece más rápidamente en $\mathbf{x}$ en la dirección opuesta al vector gradiente, esto es, en la dirección de $-\nabla f(\mathbf{x})$.

b) Obtenga la dirección en la cual la función $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decrece más rápido en el punto $(2, -3)$.

6 Suponga que el potencial eléctrico V está dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

a) Obtenga la tasa de cambio del potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. $(R : 32/\sqrt{3})$

b) ¿En cuál dirección V cambia más rápidamente en P ? $(R : \langle 19, 3, 6 \rangle)$

c) ¿Cuál es la máxima tasa de cambio en P ? $(R : 2\sqrt{406})$

7 Sea f una función de dos variables que posee derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ y $D(6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 26. Calcule la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$. $(R : \frac{327}{13})$

8 Suponga que f y g son funciones diferenciables de x y y , y que a y b son constantes. Pruebe las siguientes propiedades :

a) $\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g$ b) $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$

$$c) \nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2} \quad d) \nabla f^n = n f^{n-1} \nabla f$$

9 Muestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede ser escrito como $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} = 1$.

10 Obtenga los puntos en la superficie $z^2 = xy + 1$ que estén más cerca del origen.

(Indicación : Minimice d^2 , donde d es la distancia). $(R : (0, 0, \pm 1))$

11 Calcule las dimensiones de una caja rectangular de máximo volumen tal que la suma de las longitudes de sus 12 aristas es una constante c .

12 Para obtener la recta $y = mx + b$ de regresión lineal que mejor se ajuste a un conjunto dado de puntos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, es necesario minimizar $\sum_{i=1}^n d_i^2$,

donde $d_i = y_i - (mx_i + b)$. Muestre que, de acuerdo a este método, la pendiente m y el intercepto b de la recta de regresión se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} m \sum_{i=1}^n x_i + b n &= \sum_{i=1}^n y_i \\ m \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

(Indicación : m y b son las variables).

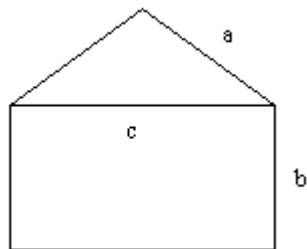
13 Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ en la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

$(R : 3 + \sqrt{29})$

14 La intersección del plano $x + y + 2z = 2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es una elipse. Determine los puntos en esta elipse que están más cerca y más lejos del origen.

$(R : \text{Cerca} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \text{Lejos} = (-1, -1, 2))$

15 Se forma un pentágono ubicando un triángulo isósceles sobre un rectángulo. Si el pentágono tiene perímetro fijo P , calcule los lados del pentágono que maximizan su área.



$(R : a = P(2\sqrt{3} - 3)/3; b = P(3 - \sqrt{3})/6; c = P(2 - \sqrt{3}))$