

LISTADO N° 3 DE EJERCICIOS DE CÁLCULO III

1 Obtenga el dominio y el recorrido de la función $f(x, y) = \frac{2}{x+y}$

2 Obtenga y grafique el dominio de la función $f(x, y) = \frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x+2y}$

3 Una placa de metal delgada, localizada en el plano xy , tiene una temperatura $T(x, y)$ en el punto (x, y) . Las curvas de nivel de T son llamadas isotermas, debido a que la temperatura en todos los puntos de una isoterma es la misma. Grafique 5 isotermas si $T(x, y) = \frac{100}{1+x^2+2y^2}$

4 Calcule, si es posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{8x^2y^2}{x^4+y^4}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+1}{x^2+y^2+1}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1} - 1}$

5 Obtenga el mayor conjunto donde la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2-y^2}{2x^2+y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua.

6 Si $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, entonces calcule $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$ e interprete estos números como pendientes. Haga un bosquejo de la situación anterior.

7 La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

se denomina *ecuación de Korteweg de Vries* (abreviadamente KdV). Demuestre que para cualquier valor positivo de la constante c , la función

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^3 \left[\frac{1}{2}(x - ct) \sqrt{c} \right]$$

es solución de la ecuación KdV.

8 Calcule las derivadas parciales indicadas.

a) $f(x, y) = x^3 y^5$; $f_x(3, -1)$

b) $xy + yz = xz$; $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ($R : \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-y-z}{x+z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-x}{x+z}$)

c) $f(s, t) = \sqrt{2 - 3s^2 + 5t^2}$; f_s, f_t, f_{st}, f_{ts}

9 La energía cinética de un cuerpo con masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2} m v^2$.

Muestre que $\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$

10 Si f y g son funciones diferenciables de una variable, muestre que la función $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ es solución de la ecuación de la onda.

11 La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2, R_3 conectadas en paralelo está dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Calcule $\frac{\partial R}{\partial R_1}, \frac{\partial R}{\partial R_2}$

12 Obtenga la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto dado.

a) $z = x^2 + 4y^2$; $(2, 1, 8)$ ($R : 4x + 8y - z = 8$)

b) $z = \ln(2x + y)$; $(-1, 3, 0)$

c) $z = \frac{\cos(\sqrt{xy}) - \ln(x^4 y^6)}{x^3 y + x^2 y^3}$; $(1, 2, 0)$

13 Si $z = f(x, y)$, donde $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ muestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$$

14 Sea f una función homogénea de grado n , es decir, $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, $\forall t$, n entero positivo. Verifique que f satisface la ecuación:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$