

**PAUTA TEST N° 5 CÁLCULO II - CÁLCULO INTEGRAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 80 MINUTOS **FECHA : Mi 29/11/06**

(1) Muestre que $u = \text{sen}(x - at) + \ln(x + at)$ es solución de la ecuación de la onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

(20 puntos).

Solución:

$$u_t = -a \cos(x - at) + \frac{a}{x+at}$$

$$u_{tt} = -a^2 \text{sen}(x - at) - \frac{a^2}{(x+at)^2} = a^2 \left(-\text{sen}(x - at) - \frac{1}{(x+at)^2} \right)$$

$$u_x = \cos(x - at) + \frac{1}{x+at}$$

$$u_{xx} = -\text{sen}(x - at) - \frac{1}{(x+at)^2}$$

$$\therefore u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \square$$

(2) Calcule

a) $\int \int x^2 \cos(xy) \, dx \, dy$

b) $\int \int x^2 \cos(xy) \, dy \, dx$

c) Compare los resultados anteriores.

(20 puntos).

Solución:

a) $\int \int x^2 \cos(xy) \, dx \, dy$

Integraremos con respecto a x (suponemos que y es constante) :

$$p' = \cos(xy) \Rightarrow p = \frac{1}{y} \operatorname{sen}(xy)$$

$$q = x^2 \Rightarrow q' = 2x$$

$$\int x^2 \cos(xy) dx = \frac{x^2}{y} \operatorname{sen}(xy) - \frac{2}{y} \int x \operatorname{sen}(xy) dx$$

$$\text{Ahora calculemos } \int x \operatorname{sen}(xy) dx$$

$$p' = \operatorname{sen}(xy) \Rightarrow p = -\frac{1}{y} \cos(xy)$$

$$q = x \Rightarrow q' = 1$$

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen}(xy) dx &= -\frac{x}{y} \cos(xy) + \frac{1}{y} \int \cos(xy) dx = \\ &= -\frac{x}{y} \cos(xy) + \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(xy) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(xy) dx &= \frac{x^2}{y} \operatorname{sen}(xy) - \frac{2}{y} \int x \operatorname{sen}(xy) dx = \\ &= \frac{x^2}{y} \operatorname{sen}(xy) - \frac{2}{y} \left[-\frac{x}{y} \cos(xy) + \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(xy) \right] = \\ &= \left(\frac{x^2}{y} - \frac{2}{y^3} \right) \operatorname{sen}(xy) + \frac{2x}{y^2} \cos(xy) + c \end{aligned} \quad (*)$$

Falta integrar la expresión (*) con respecto a y :

$$\begin{aligned} \int \left[\left(\frac{x^2}{y} - \frac{2}{y^3} \right) \operatorname{sen}(xy) + \frac{2x}{y^2} \cos(xy) \right] dy &= \\ \int \frac{x^2}{y} \operatorname{sen}(xy) dy - \int \frac{2}{y^3} \operatorname{sen}(xy) dy + \int \frac{2x}{y^2} \cos(xy) dy &= \\ x^2 I + \frac{\operatorname{sen}(xy)}{y^2} + \frac{x}{y} \cos(xy) + x^2 I - \frac{2x}{y} \cos(xy) - 2x^2 I &= \\ \frac{\operatorname{sen}(xy)}{y^2} - \frac{x}{y} \cos(xy) \end{aligned}$$

$$\text{donde } I = \int \frac{1}{y} \operatorname{sen}(xy) dy \star$$

$$b) \int \int x^2 \cos(xy) dy dx$$

Calculemos $\int x^2 \cos(xy) dy$:

$$\int x^2 \cos(xy) dy = x^2 \int \cos(xy) dy = \frac{x^2}{x} \operatorname{sen}(xy) = x \operatorname{sen}(xy) \quad (**)$$

Integremos la expresión (**) con respecto a x :

$$\int x \operatorname{sen}(xy) dx$$

$$p' = \operatorname{sen}(xy) \Rightarrow p = -\frac{1}{y} \cos(xy)$$

$$q = x \Rightarrow q' = 1$$

$$\int x \operatorname{sen}(xy) dx = -\frac{x}{y} \cos(xy) + \frac{1}{y} \int \cos(xy) dx = -\frac{x}{y} \cos(xy) + \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(xy) \star$$

c) Los resultados son los mismos, pero claramente el camino dado por b) fue más fácil que el dado por a). ★

(3) Obtenga la serie de Maclaurin de $f(x) = \frac{2x}{(1-x)^2}$

(20 puntos).

Solución:

$$\text{Sabemos que : } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (1)$$

Derivando la expresión (1) se tiene :

$$\left[\frac{1}{1-x} \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$

Multiplicando por $2x$ la última expresión :

$$\frac{2x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n x x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2n x^n \square$$