

PAUTA TEST N° 3 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 50 MINUTOS

FECHA : Ju 15/10/26

1) Calcule $[x \cdot \operatorname{cosech}(x)]'$

(30 puntos)

Solución:

$$[x \cdot \operatorname{cosech}(x)]' = \operatorname{cosech}(x) - x \operatorname{ctgh}(x) \operatorname{cosech}(x) \quad \square$$

2) Calcule $\int \operatorname{Arcctgh}(x) dx$

(30 puntos)

Solución:

Primero calculemos la derivada de $\operatorname{Arcctgh}(x)$

Tenemos que : $\operatorname{Arcctgh}(x) = y \Leftrightarrow \operatorname{ctgh}(y) = x$

$$\operatorname{ctgh}(y) = x \Rightarrow [\operatorname{ctgh}(y)]' = [x]' \Rightarrow -\operatorname{cosech}^2(y) \cdot y' = 1 \Rightarrow y' = -\frac{1}{\operatorname{cosech}^2(y)}$$

Ahora, sabemos que $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$

$$\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1 \Rightarrow \frac{\cosh^2(y)}{\sinh^2(y)} - \frac{\sinh^2(y)}{\sinh^2(y)} = \frac{1}{\sinh^2(y)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{ctgh}^2(y) - 1 = \operatorname{cosech}^2(y) \Rightarrow \operatorname{cosech}^2(y) = x^2 - 1$$

$$\text{Luego, } y' = [\operatorname{Arcctgh}(x)]' = -\frac{1}{\operatorname{cosech}^2(y)} = -\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Calculemos la integral $\int \operatorname{Arcctgh}(x) dx$ usando integración por partes.

$$p' = 1 \Rightarrow p = x$$

$$q = \operatorname{Arcctgh}(x) \Rightarrow q' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \operatorname{Arcctgh}(x) dx = x \operatorname{Arcctgh}(x) - \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

Para resolver $\int \frac{x}{1-x^2} dx$ usemos sustitución simple.

$$M = 1 - x^2 \Rightarrow dM = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dM$$

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{M} dM = -\frac{1}{2} \ln|M| + c = -\frac{1}{2} \ln|1-x^2| + c$$

Finalmente,

$$\int \operatorname{Arcctgh}(x) dx = x \operatorname{Arcctgh}(x) + \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + c \quad \square$$

Obs.: En el test no se debe usar calculadora ni celular.