

PAUTA TEST N° 3 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE : _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 20 MINUTOS **FECHA : Vi 17/10/25**

1) Encuentre la longitud de arco de $x = at - a \operatorname{sen}(t)$, $y = a - a \cos(t)$, en el intervalo $[0, 2\pi]$, con $a > 0$

(15 puntos)

Solución:

Recordemos que $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

$$\frac{dx}{dt} = a - a \cos(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a \operatorname{sen}(t)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (a - a \cos(t))^2 + (a \operatorname{sen}(t))^2 =$$

$$a^2 - 2a^2 \cos(t) + a^2 \cos^2(t) + a^2 \operatorname{sen}^2(t) = a^2 - 2a^2 \cos(t) + a^2(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t))$$

$$= a^2 - 2a^2 \cos(t) + a^2 = 2a^2 (1 - \cos(t))$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{2a^2 (1 - \cos(t))} = a \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(t)}$$

Notemos que $1 - \cos(t)$ es mayor o igual que cero.

Por otro lado,

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) \Rightarrow 1 - \cos(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}^2(\alpha)$$

Si hacemos $t = 2\alpha$, es decir, $\alpha = \frac{t}{2}$, se tiene

$$1 - \cos(t) = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Notemos que $0 \leq t \leq 2\pi$, es decir, $0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi$, por lo que $\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$ es mayor o igual que cero.

Luego,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(t)} dt = \int_0^{2\pi} a \sqrt{2} \sqrt{2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2a \left(-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= -4a (\cos(\pi) - \cos(0)) = -4a (-1 - 1) = 8a \quad \square \end{aligned}$$

2) Calcule la derivada de $\ln(\operatorname{senh}(x) + \operatorname{tgh}(x))$ y la integral de $\operatorname{tgh}^2(x) \operatorname{sech}^2(x)$ (15 puntos)

Solución:

Sea $f(x) = \ln(\operatorname{senh}(x) + \operatorname{tgh}(x))$

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x) + \operatorname{tgh}(x)} (\operatorname{senh}(x) + \operatorname{tgh}(x))' =$$

$$\frac{1}{\operatorname{senh}(x) + \operatorname{tgh}(x)} (\cosh(x) + \operatorname{sech}^2(x)) = \frac{\cosh(x) + \operatorname{sech}^2(x)}{\operatorname{senh}(x) + \operatorname{tgh}(x)}$$

Sea $g(x) = \operatorname{tgh}^2(x) \operatorname{sech}^2(x)$

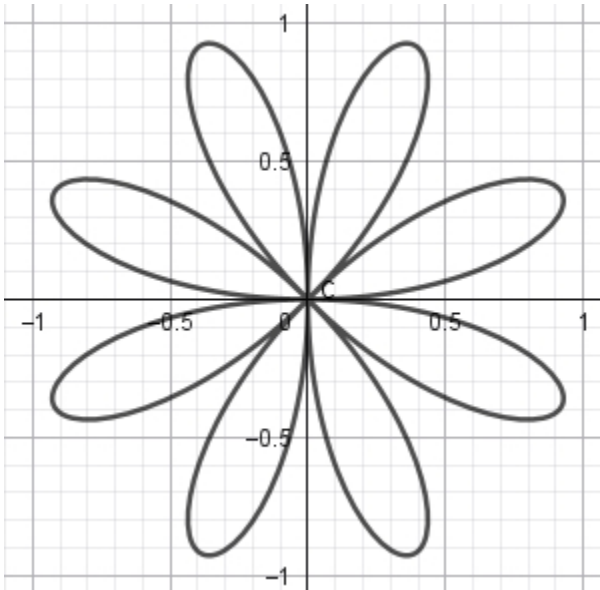
Si hacemos $B = \operatorname{tgh}(x)$, se tiene $dB = \operatorname{sech}^2(x) dx$

$$\int g(x) dx = \int \operatorname{tgh}^2(x) \operatorname{sech}^2(x) dx = \int B^2 dB = \frac{1}{3} B^3 + c = \frac{1}{3} \operatorname{tgh}^3(x) + c \quad \square$$

3) Encuentre el área encerrada por la curva $r = \operatorname{sen}(4\alpha)$

(15 puntos)

Solución:



Determinemos las tangentes al polo:

$$r = \text{sen}(4\alpha) = 0 \Rightarrow \text{sen}(4\alpha) = 0 \Rightarrow 4\alpha = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$r' = 4 \cos(\alpha) \Rightarrow r'(0) = 4 \cos(0) = 4 \neq 0, r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \neq 0$$

Observamos que si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ obtenemos un solo pétalo, por lo que para calcular el área total encerrada por la rosa, podemos hacer

$$A = 8 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [r(\alpha)]^2 d\alpha = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2(4\alpha) d\alpha = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 - \cos(8\alpha)) d\alpha =$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos(8\alpha)) d\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\alpha - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(8\alpha) d\alpha = 2\alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \frac{1}{8} \text{sen}(8\alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \text{sen}(2\pi) + \frac{1}{4} \text{sen}(0) = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

4) Muestre que las curvas $r = a \text{sen}(\alpha)$ y $r = a \cos(\alpha)$ se intersecan en ángulos rectos.

(15 puntos)

Solución:

Para $r = a \text{sen}(\alpha)$:

$$x = a \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha)$$

$$y = a \text{sen}^2(\alpha)$$

Para $r = a \cos(\alpha)$:

$$x = a \cos^2(\alpha)$$

$$y = a \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

Estas curvas son circunferencias que se intersecan en el origen y en $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$

$$r = r \Rightarrow a \sin(\alpha) = a \cos(\alpha) \Rightarrow \sin(\alpha) = \cos(\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

En el origen se observa, en GeoGebra, que la primera circunferencia tiene una tangente horizontal y la segunda una tangente vertical, por lo que se intersecan en ángulo recto.

Calculemos las pendientes de cada curva en el punto $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$

Para la circunferencia $r = a \sin(\alpha)$

$$\frac{dx}{d\alpha} = -a \sin^2(\alpha) + a \cos^2(\alpha) = a \cos(2\alpha) \Rightarrow \frac{dx}{d\alpha}(\frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = 2a \sin(\alpha) \cos(\alpha) = a \sin(2\alpha) \Rightarrow \frac{dy}{d\alpha}(\frac{\pi}{4}) = a$$

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}} = \frac{a}{0}$$

Observamos que la recta con pendiente m_1 es vertical

Para la circunferencia $r = a \cos(\alpha)$

$$\frac{dx}{d\alpha} = -2a \cos(\alpha) \sin(\alpha) = -a \sin(2\alpha) \Rightarrow \frac{dx}{d\alpha}(\frac{\pi}{4}) = -a$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = a \cos^2(\alpha) - a \sin^2(\alpha) = a \cos(2\alpha) \Rightarrow \frac{dy}{d\alpha}(\frac{\pi}{4}) = 0$$

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}} = \frac{0}{-a} = 0$$

Observamos que la recta con pendiente m_2 es horizontal.

Por lo que las curvas se intersecan en ángulo recto también en $\frac{\pi}{4}$ 