

**PAUTA TEST N° 2 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS

FECHA : Vi 03/10/25

1) Convierta $x = t - \frac{1}{t}$; $y = 1 + \frac{1}{t}$ a cartesianas

(15 puntos)

Solución:

$$y = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{y-1}$$

$$x = t - \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{y-1} - (y-1) \Rightarrow x + y - 1 = \frac{1}{y-1} \Rightarrow (x + y - 1)(y - 1) = 1 \Rightarrow xy - x + y^2 - y - y + 1 = 1 \Rightarrow y^2 + xy - x - 2y = 0 \quad \square$$

2) Calcule una aproximación de la integral $\int_0^1 x^2 dx$, usando el método de Simpson con $n = 4$

(15 puntos)

Solución:

La fórmula del método de Simpson $\frac{1}{3}$ es

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} x_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} x_{2i} + f(x_n)] \quad (*)$$

En uestro caso particular, se tiene que $n = 4$, $x_0 = 0$, $x_4 = 1$, $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$,
 $f(x) = x^2$

La partición es: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 1$

$$f(x_0) = f(0) = 0^2 = 0$$

$$f(x_1) = f(0.25) = 0.25^2 = 0.0625$$

$$f(x_2) = f(0.5) = 0.5^2 = 0.25$$

$$f(x_3) = f(0.75) = 0.5625$$

$$f(x_4) = f(1) = 1^2 = 1$$

Reemplazando en la fórmula (*) :

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 f(x_1) + 2 f(x_2) + 4 f(x_3) + f(x_4)] =$$

$$\frac{1}{12} [0 + 4(0.0625) + 2(0.25) + 4(0.5625) + 1] = \frac{1}{12} [0 + 0.25 + 0.5 + 2.25 + 1] =$$

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Observamos que la aproximación es $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, que en realidad es el valor exacto. $\square$

3) Encuentre el área de la región R acotada por los gráficos de $y = x^2 + 2x + 1$ y la recta que pasa por los puntos $(-3, 4)$ y $(0, 1)$ **(15 puntos)**

Solución:

Notemos que la recta que pasa por los puntos $(-3, 4)$ y $(0, 1)$ es $y = -x + 1$

Por otro lado la parábola $y = x^2 + 2x + 1$ es tal que

$$y = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y = (x + 1)^2$$

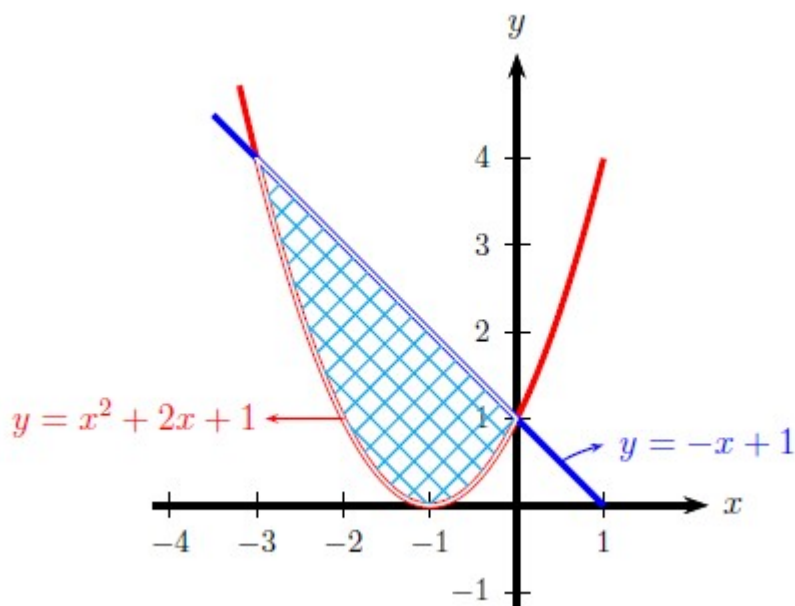
Esto muestra que la parábola tiene vértice en el punto $(-1, 0)$

Obtengamos los puntos de intersección entre las curvas

$$-x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = -3$$

Los puntos de intersección son $P_1 = (0, 1)$ y $P_2 = (-3, 4)$

Considerando lo anterior, la gráfica es :



Integremos

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^0 \left[(-x+1) - (x^2+2x+1) \right] dx = \int_{-3}^0 \left[-x^2-3x \right] dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^0 = -\left(-\frac{1}{3}(-3)^3 - \frac{3}{2}(-3)^2 \right) = -\left(9 - \frac{27}{2} \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, el área A de la región R acotada por los gráficos de $y = x^2 + 2x + 1$ y la recta que pasa por los puntos $(-3, 4)$ y $(0, 1)$ es $A = \frac{9}{2}$ $\square$

4) Obtenga $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $x = e^{-t}$, $y = te^{2t}$

(15 puntos)

Solución:

$$x = e^{-t}, \quad y = te^{2t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{2t} + 2te^{2t}$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2t} + 2te^{2t}}{-e^{-t}} = -(e^{2t} + 2te^{2t})e^t = -e^{3t} - 2te^{3t} = -(1 + 2t)e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dx} \right] = -3e^{3t} - 2e^{3t} - 6te^{3t} = -5e^{3t} - 6te^{3t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-5e^{3t} - 6te^{3t}}{-e^{-t}} = (5e^{3t} + 6te^{3t})e^t = 5e^{4t} + 6te^{4t} = (5 + 6t)e^{4t}$$

Finalmente,

$$\frac{dy}{dx} = -(1 + 2t)e^{3t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (5 + 6t)e^{4t} \quad \square$$