

PAUTA CERTAMEN N° 3 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE : _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS **FECHA : Vi 05/12/25**

1) Si f' es continua en $[a, b]$, entonces la longitud de arco L de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ es $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
Un cable telefónico que cuelga entre dos postes ubicados en $x = -b$ y $x = b$ tiene la forma de una catenaria de ecuación $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Obtenga el largo del cable.

(10 puntos)

Solución:

$$y \equiv f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow y' \equiv f'(x) = a \frac{1}{a} \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow y' = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Recordemos que :

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1, \text{ es decir, } 1 + \sinh^2(z) = \cosh^2(z)$$

Luego

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} &= \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \\ L &= \int_{-b}^b \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = \int_{-b}^b \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_{-b}^b = \\ &= a \sinh\left(\frac{b}{a}\right) - a \sinh\left(\frac{-b}{a}\right) = a \sinh\left(\frac{b}{a}\right) + a \sinh\left(\frac{b}{a}\right) = 2a \sinh\left(\frac{b}{a}\right) \quad \square \end{aligned}$$

2) Muestre que: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - 1$

(10 puntos)

Solución:

$$\text{Sabemos que } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\text{Luego : } e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \square$$

3) a) Obtenga la derivada direccional de: $g(x, y) = x e^{xy}$; $(-3, 0)$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

b) Obtenga $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z^2 + y^2 - x^3 = tg(x + y) - z$

(20 puntos)

Solución:

$$a) \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{[2, 3]}{\sqrt{4+9}} = \frac{[2, 3]}{\sqrt{13}} = \left[\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right]$$

$$\nabla g = [g_x, g_y] = [e^{xy} + xy e^{xy}, x^2 e^{xy}]$$

$$\nabla g(P_0) = \nabla g(-3, 0) = [1, 9]$$

$$D_{\mathbf{u}}(g) = \langle \nabla g(P_0), \mathbf{u} \rangle = \langle [1, 9], \left[\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right] \rangle = \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{27}{\sqrt{13}} = \frac{29}{\sqrt{13}} \quad \square$$

$$b) z^2 + y^2 - x^3 = tg(x + y) - z \Rightarrow 2z z_x - 3x^2 = \sec^2(x + y) - z_x \Rightarrow$$

$$(2z + 1) z_x = \sec^2(x + y) + 3x^2 \Rightarrow z_x = \frac{\sec^2(x+y)+3x^2}{2z+1}$$

$$z^2 + y^2 - x^3 = tg(x + y) - z \Rightarrow 2z z_y + 2y = \sec^2(x + y) - z_y \Rightarrow$$

$$(2z + 1) z_y = \sec^2(x + y) - 2y \Rightarrow z_y = \frac{\sec^2(x+y)-2y}{2z+1} \quad \square$$

4) Muestre que: $\|\mathbf{r}(t)\| = c$, con c constante $\Rightarrow \mathbf{r}'(t)$ es ortogonal con $\mathbf{r}(t)$, $\forall t$

(10 puntos)

Solución:

$$\|\mathbf{r}(t)\| = c \Rightarrow \|\mathbf{r}(t)\|^2 = c^2 \Rightarrow \langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t) \rangle = c^2 \Rightarrow \langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t) \rangle' = (c^2)' \Rightarrow$$

$$\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) \rangle + \langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) \rangle + \langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) \rangle = 0 \Rightarrow 2 \langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{r}'(t) \text{ es ortogonal con } \mathbf{r}(t), \forall t \quad \square$$

5) El valor promedio de una función $f(x, y)$ sobre un rectángulo R está dado

por $f_{prom} = \frac{1}{A(R)} \int_R \int f(x, y) dA$, donde $A(R)$ representa el área de R .

Calcule el valor promedio de f sobre el rectángulo R , con $f(x, y) = x^2 y$, donde R tiene vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$ y $(1, 0)$

(10 puntos)

Solución:

Dado que R tiene vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$ y $(1, 0)$, observamos que $x \in [-1, 1]$ y $y \in [0, 5]$

Luego $A(R) = 2 \cdot 5 = 10$

$$f_{prom} = \frac{1}{A(R)} \int_R \int f(x, y) dA = \frac{1}{10} \int_{-1}^1 \int_0^5 x^2 y dy dx = \frac{1}{10} \int_{-1}^1 x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^5 dx =$$

$$\frac{1}{10} \int_{-1}^1 x^2 \frac{25}{2} dx = \frac{25}{20} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{5}{4} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 dx = \frac{5}{4} \frac{1}{3} + \frac{5}{4} \frac{1}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad \square$$