UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

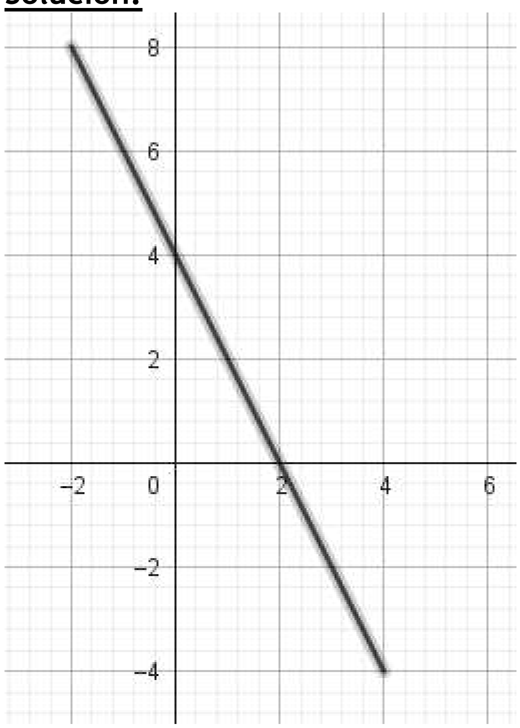
PAUTA CERTAMEN N° 3 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Mi 27/11/24**

1) Dibuje la curva representada por las ecuaciones paramétricas dadas y además elimine el parámetro para obtener la ecuación cartesiana de la curva.
$x = 1 - t\,;\; y = 2 + 2t$

(**10 puntos**)

Solución:



$x = 1 - t \;\Rightarrow t = 1 - x$
$y = 2 + 2t \Rightarrow y = 2 + 2(1 - x) \Rightarrow y = 2 + 2 - 2x \Rightarrow y = 4 - 2x$ ❑

2) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ __V___ La longitud total del astroide $x = a\,cos^3(\theta)$, $y = a\,sen^3(\theta)$ es $6a$
Justificación:

La longitud L de C está dada por $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

$\frac{dx}{dt} = -3a\, cos^2(\theta)\, sen(\theta) \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 9a^2\, cos^4(\theta)\, sen^2(\theta)$

$\frac{dy}{dt} = 3a\, sen^2(\theta)\, cos(\theta) \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 9a^2\, sen^4(\theta)\, cos^2(\theta)$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9a^2\, cos^4(\theta)\, sen^2(\theta) + 9a^2\, sen^4(\theta)\, cos^2(\theta) =$

$9a^2\, cos^2(\theta)\, cos^2(\theta)\, sen^2(\theta) + 9a^2\, sen^2(\theta)\, sen^2(\theta)\, cos^2(\theta) =$

$9a^2\, cos^2(\theta)\, sen^2(\theta)\, (cos^2(\theta) + sen^2(\theta)) = 9a^2\, cos^2(\theta)\, sen^2(\theta)$

$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = 3a\, cos(\theta)\, sen(\theta)$

Por simetría tenemos que $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\, cos(\theta)\, sen(\theta)\ d\theta = 12\, a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} sen(2\theta)\ d\theta = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2\theta)\ d\theta$

$= 6a\ \left(-\frac{1}{2} cos(2\theta)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a\, cos(\pi) + 3a\, cos(0) = 3a + 3a = 6a$ ❑

$b)$ __V___ El plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1,1,3)$ es $4x + 2y - z = 3$

Justificación:

El plano tangente a una curva $z = f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es $z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$

$z = f(x,y) = 2x^2 + y^2;\ (x_0,y_0,z_0) = (1,1,3);\ f_x = 4x;\ f_y = 2y;\ f_x(1,1) = 4;$ $f_y(1,1) = 2$

$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) \Rightarrow z - 3 = 4(x-1) + 2(y-1) \Rightarrow$

$z - 3 = 4x - 4 + 2y - 2 \Rightarrow 4x + 2y - z = 3$ ❑

$c)$ __F___ $\int_R \int x\, e^{xy}\ dA = \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy$, si $R = [0,1] \times [0,1]$

Justificación:

$\int_R \int x\, e^{xy}\ dA = \int_0^1 \int_0^1 x\, e^{xy}\ dy\, dx = \int_0^1 x \int_0^1 e^{xy}\ dy\, dx = \int_0^1 x\, \frac{e^{xy}}{x}\Big|_0^1\ dx =$

$\int_0^1 e^{xy}\Big|_0^1\ dx = \int_0^1 (e^x - 1)\ dx = (e^x - x)\Big|_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2$

$\int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy = \int_1^2 \int_0^1 (x+y)^{-2}\, dx\, dy = \int_1^2 -(x+y)^{-1}\Big|_0^1\ dy =$

$\int_1^2 -(1+y)^{-1} + y^{-1}\ dy = -\int_1^2 \frac{1}{1+y}\, dy + \int_1^2 \frac{1}{y}\ dy = [-ln(1+y) + ln(y)]\Big|_1^2 =$

$-ln(3) + ln(2) + ln(2) - ln(1) = 2\, ln(2) - ln(3)$

Observamos que

$$\int_R \int x\, e^{xy}\ dA = e - 2 \neq \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy = 2\, ln(2) - ln(3)$$ ❑

(30 puntos)

3) Obtenga el área encerrada por $r = 2\,cos(4\alpha)$

(10 puntos)

<u>**Solución:**</u>

Obtengamos las tangentes al polo

$$2\,cos(4\alpha) = 0 \Rightarrow cos(4\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} \\ 4\alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

Esta es una rosa de 8 pétalos, por lo que el área encerrada será

$$A = 8\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{2}(2\,cos(4\alpha))^2\,d\alpha = 16\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} cos^2(4\alpha)\,d\alpha = 16\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{2}(1 + cos(8\alpha))\,d\alpha =$$

$$8\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} (1 + cos(8\alpha))\,d\alpha = 8\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} d\alpha + 8\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} cos(8\alpha)\,d\alpha =$$

$$8\,\alpha\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} + 8\,\frac{1}{8}sen(8\alpha)\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} = 8\,\alpha\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} + sen(8\alpha)\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} = 3\pi - \pi + sen(3\pi) - sen(\pi)$$

$$= 2\pi \quad \square$$

4) $a)$ Muestre que la función $u(x,y) = e^x\,sen(y)$ es solución de la ecuación diferencial parcial de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$b)$ Verifique que $u(x,t) = sen(x - at)$ satisface la ecuación de la onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(10 puntos)

<u>**Solución:**</u>

$a)$ $u(x,y) = e^x\,sen(y) \Rightarrow u_x = e^x\,sen(y) \Rightarrow u_{xx} = e^x\,sen(y)$

$u(x,y) = e^x\,sen(y) \Rightarrow u_y = cos(y)\,e^x \Rightarrow u_{yy} = -\,sen(y)\,e^x$

Luego, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $\square$

$b)$ $u(x,t) = sen(x - at) \Rightarrow u_t = -\,a\,cos(x - at) \Rightarrow u_{tt} = -\,a^2\,sen(x - at)$

$u(x,t) = sen(x - at) \Rightarrow u_x = cos(x - at) \Rightarrow u_{xx} = -\,sen(x - at)$

Observamos que $u_{tt} = a^2\,u_{xx}$ $\square$