UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 PRIMERA PARTE
CÁLCULO II - CÁLCULO INTEGRAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA FECHA : Vi 17/11/06

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas**.

$a)$ __F__ La función $f(x)=\int \frac{1}{ax-b}\,dx$ es siempre lineal.

Justificación.

Si $a\neq 0$, entonces

$$f(x)=\int \frac{1}{ax-b}\,dx =^{u=ax-b\,;\,du=a\,dx} \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,du=\frac{1}{a}ln|u|+c=\frac{1}{a}ln|ax-b|+c$$

que no es lineal, pues la función ln no es lineal.★

$b)$ __V__ La función $g(x)=\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ es tal que $g(-\frac{1}{2})=\pi$

Justificación.

$$g(x)=\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx=\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$u=x+\frac{1}{2}\Rightarrow du=dx$$

$$g(x)=\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx=\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du =^{\text{Fórmula 17}} \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\big(\frac{2u}{\sqrt{3}}\big)+c= \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\big)+c$$

Luego : $g(-\frac{1}{2})=\pi\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}arctg(0)+c=\pi\Rightarrow 0+c=\pi\Rightarrow c=\pi$

Existe una función g que satisface la condición $g(-\frac{1}{2})=\pi$ y es

$$g(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\big)+\pi★$$

$c)$ __F__ $\int_0^2 e^{-\alpha}cos(3\alpha)\;d\alpha+\int_0^{\pi/2} sen(2r)\,sen(4r)\,dr=e^3+\pi$

Justificación.

Calculemos $\int_0^2 e^{-\alpha}cos(3\alpha)\;d\alpha$:

$p' = e^{-\alpha} \Rightarrow p = -e^{-\alpha}$
$q = cos(3\alpha) \Rightarrow q' = -3sen(3\alpha)$

$$I = \int_0^2 e^{-\alpha} cos(3\alpha)\ d\alpha = -e^{-\alpha} cos(3\alpha)\Big|_0^2 - 3\int_0^2 e^{-\alpha} sen(3\alpha)\ d\alpha$$

Ahora para calcular $\int_0^2 e^{-\alpha} sen(3\alpha)\ d\alpha$ hacemos :

$p' = e^{-\alpha} \Rightarrow p = -e^{-\alpha}$
$q = sen(3\alpha) \Rightarrow q' = 3\,cos(3\alpha)$

$$\int_0^2 e^{-\alpha} sen(3\alpha)\ d\alpha = -e^{-\alpha} sen(3\alpha)\Big|_0^2 + 3\int_0^2 e^{-\alpha} cos(3\alpha)\ d\alpha =$$
$$-e^{-\alpha} sen(3\alpha)\Big|_0^2 + 3I =$$

Por lo tanto :

$$I = -e^{-\alpha} cos(3\alpha)\Big|_0^2 + 3\,e^{-\alpha} sen(3\alpha)\Big|_0^2 - 9I \Rightarrow$$
$$10I = -e^{-\alpha} cos(3\alpha)\Big|_0^2 + 3\,e^{-\alpha} sen(3\alpha)\Big|_0^2 \Rightarrow$$
$$I = \frac{-e^{-\alpha} cos(3\alpha)\Big|_0^2 + 3\,e^{-\alpha} sen(3\alpha)\Big|_0^2}{10} = \frac{-e^{-2} cos(6) + 1 + 3\,e^{-2} sen(6)}{10}$$

Calculemos $\int_0^{\pi/2} sen(2r)\,sen(4r)\,dr$:
Recordemos que $sen(z)\,sen(w) = \frac{1}{2}[\,cos(z-w) - cos(z+w)]$, luego

$$sen(2r)\,sen(4r) = \frac{1}{2}[\,cos(2r-4r) - cos(2r+4r)] = \frac{1}{2}[\,cos(-2r) - cos(6r)] =$$
$$\frac{1}{2}[\,cos(2r) - cos(6r)]$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\pi/2} sen(2r)\,sen(4r)\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[\,cos(2r) - cos(6r)]\,dr =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} cos(2r)\,dr - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} cos(6r)\,dr = \frac{1}{4} sen(2r)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{12} sen(6r)\Big|_0^{\pi/2} = 0$$

Finalmente

$$\int_0^2 e^{-\alpha} cos(3\alpha)\ d\alpha + \int_0^{\pi/2} sen(2r)\,sen(4r)\,dr = \frac{-e^{-2} cos(6) + 1 + 3\,e^{-2} sen(6)}{10} \neq e^3 + \pi \bigstar$$

(30 puntos).