UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :_____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Ju 05/11/26**

1) Resuelva $\int senh(2x)\ dx$

Solución:

Sea $m = 2x$

$m = 2x \Rightarrow dm = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\,dm$

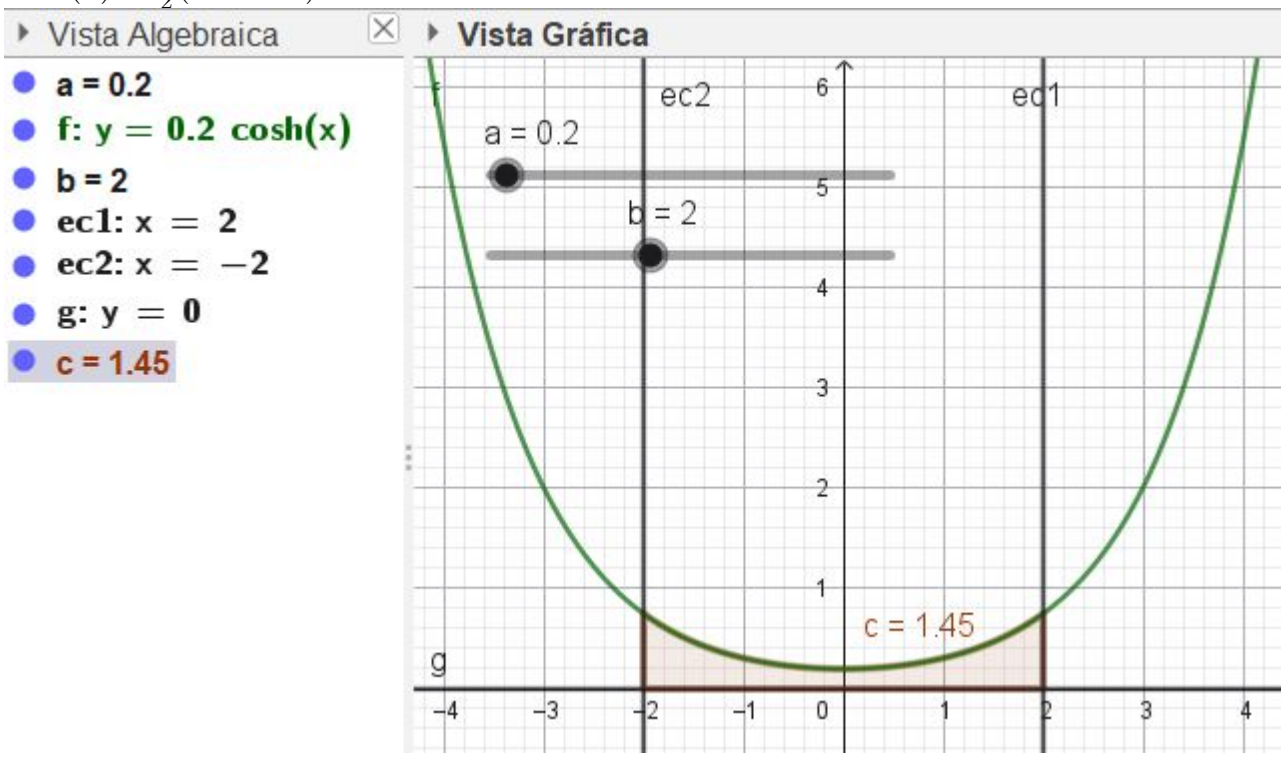
$$\int senh(2x)\ dx = \frac{1}{2}\int senh(m)\ dm = \frac{1}{2}cosh(m) + c = \frac{1}{2}cosh(2x) + c \ \square$$

(15 puntos)

2) Calcule el área de la región comprendida bajo la catenaria $y = a\,cosh(x)$, con $a > 0$, el eje x y las rectas $x = -b$ y $x = b$

Solución:

Observamos que $y = a\,cosh(x)$ es siempre positiva si $a > 0$, pues $cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$



$A = \int_{-b}^{b} a\,cosh(x)\,dx = a\int_{-b}^{b} cosh(x)\,dx = a\,senh(x)\Big|_{-b}^{b} =$
$a\,senh(b) - a\,senh(-b) = 2\,a\,senh(b)$, pues $senh(x)$ es una función impar. ❑

(15 puntos)

3) Calcule en forma aproximada, usando Simpson $1/3$, la integral $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, para $n = 4$. Considere 8 decimales redondeados en todos sus cálculos.

Solución:

La fórmula de Simpson $1/3$ es

$\int_a^b f(x)\,dx \approx$

$\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$,

donde n es un número natural par mayor o igual que 2, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_i = a + h\,i$, para $i = 0, 1, 2, ..., n$

En nuestro ejercicio $f(x) = e^{-x^2}$, $n = 4$, $a = 0$ y $b = 1$, luego $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = \frac{4}{4} = 1$

$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1$
$f(x_1) = f(\frac{1}{4}) = e^{-\frac{1}{16}} \approx 0.93941306$
$f(x_2) = f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.77880078$
$f(x_3) = f(\frac{3}{4}) = e^{-\frac{9}{16}} \approx 0.56978282$
$f(x_4) = f(1) = e^{-1} \approx 0.36787944$

$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx$
$\frac{1}{12}[1 + 4(0.93941306) + 2(0.77880078) + 4(0.56978282) + 0.36787944] =$

$\frac{1}{12}[1 + 3.75765224 + 1.55760156 + 2.27913128 + 0.36787944] = \frac{1}{12}[8.96226452] \approx$

0.74685538 ❑

(10 puntos)

4) ¿Qué curva es representada por las acuaciones paramétricas $x = sen(2t)$ y $y = cos(2t)$, con $t \in [0, 2\pi]$?. Justifique.

Solución:

Tenemos que : $x^2 + y^2 = sen^2(2t) + cos^2(2t) = 1$

La curva $x^2 + y^2 = 1$ representa una circunsferencia centrada en el origen y de radio 1.
Ahora, dado que $t \in [0, 2\pi]$, notamos que $2t = 2(2\pi) = 4\pi$, esto significa que la circunferencia es recorrida completamente dos veces. ❑

(05 puntos)

5) Obtenga la tranformada de Laplace de $f(t) = t$

Solución:

La transformada de Laplace de $f(t) = t$ está dada por: $L[t] = \int_0^\infty t\, e^{-s\,t}\, dt$, con $s > 0$.

$$L[t](s) = \int_0^\infty t\, e^{-s\,t}\, dt = \lim_{r\to\infty} \int_0^r t\, e^{-s\,t}\, dt$$

Calculemos, en primer lugar, la integral indefinida $\int t\, e^{-s\,t}\, dt$ usando integración por partes

$p' = e^{-s\,t} \Rightarrow p = -\frac{1}{s}\, e^{-st}$

$q = t \Rightarrow q' = 1$

$$\int t\, e^{-s\,t}\, dt = -\frac{1}{s}\, t\, e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-s\,t}\, dt = -\frac{1}{s}\, t\, e^{-st} - \frac{1}{s^2}\, e^{-s\,t}$$

Luego : $\int_0^r t\, e^{-s\,t}\, dt = \left[-\frac{1}{s}\, t\, e^{-st} - \frac{1}{s^2}\, e^{-s\,t} \right]_0^r = -\frac{1}{s}\, r\, e^{-s\,r} - \frac{1}{s^2}\, e^{-s\,r} + \frac{1}{s^2}$

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r t\, e^{-s\,t}\, dt = \lim_{r\to\infty} \left[-\frac{1}{s}\, r\, e^{-s\,r} - \frac{1}{s^2}\, e^{-s\,r} + \frac{1}{s^2} \right] =$$

$$-\frac{1}{s} \lim_{r\to\infty} r\, e^{-s\,r} - \frac{1}{s^2} \lim_{r\to\infty} e^{-s\,r} + \frac{1}{s^2} \lim_{r\to\infty} 1 = -\frac{1}{s} \lim_{r\to\infty} r\, e^{-s\,r} - 0 + \frac{1}{s^2}$$

Usemos la regla de L'Hopital para calcular el límite $\lim_{r\to\infty} r\, e^{-s\,r}$

$$\lim_{r\to\infty} r\, e^{-s\,r} = \lim_{r\to\infty} \frac{r}{e^{s\,r}} = \text{L'H} \lim_{r\to\infty} \frac{1}{s\, e^{s\,r}} = 0$$

Finalmente, $L[t](s) = \frac{1}{s^2}$ ❑

(15 puntos)