UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Mi 16/10|/24**

1) Calcule la primera derivada de $g(x) = tgh(3x)$

(12 puntos)

Solución:

$g(x) = tgh(3x) \Rightarrow g'(x) = 3\,sech^2(3x)$

Recordemos que $(tgh(z))' = sech^2(z)$ ❑

2) Obtenga el radio y el intervalo de convergencia para la siguiente serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$

(12 puntos)

Solución:

Sea R el radio de convergencia.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{(n+1)+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+3}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

El intervalo de convergencia es $-R < x < R$, es decir, $-1 < x < 1$ ❑

3) Obtenga la serie de Maclaurin para $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

(12 puntos)

Solución:

Recordemos que la serie de Maclaurin de $f(x)$ es $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$

Tenemos que

$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = [(1-x)^{-2}]' = -2\,(1-x)^{-3}(-1) = 2\,(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f'(0) = 2$

$f^{(2)}(x) = [2(1-x)^{-3}]' = (2)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = (2)\,(3)\,(1-x)^{-4} = \frac{(2)(3)}{(1-x)^4}$

$\Rightarrow f^{(2)}(0) = 2 \cdot 3$

$f^{(3)}(x) = [(2)\,(3)\,(1-x)^{-4}]' = (2)\,(3)$

$(-4)(1-x)^{-5}(-1) = (2)(3)(4)(1-x)^{-5} = \frac{(2)(3)(4)}{(1-x)^5} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4$

Observamos que $f^{(n)}(0) = (n+1)!$

Luego

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\,n!}{n!}\, x^{nn} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$$

Finalmente, la serie de Maclaurin para $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ es $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$ ❑

4) Si $f(t)$ es una función continua para $t \geq 0$, la *transformada de Laplace* de f es una función F definida por $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt$, donde el dominio de F es el conjunto de todos los números s tales que la integral converge.

Obtenga la transformada de Laplace de $f(t) = t$

(12 puntos)

Solución:

$F(s) = \int_0^{\infty} t\, e^{-s\,t}\, dt$

Calculemos $\int t\, e^{-s\,t}\, dt$

$p' = e^{-st} \Rightarrow p = -\frac{1}{s}\, e^{-st}$

$q = t \Rightarrow q' = 1$

$\int t\, e^{-s\,t}\, dt = -\frac{1}{s}\, t\, e^{-st} + \frac{1}{s} \int e^{-st} dt = -\frac{1}{s}\, t\, e^{-st} - \frac{1}{s^2}\, e^{-st}$

Ahora, $\int_0^{\infty} t\, e^{-s\,t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty} \int_0^{b} t\, e^{-s\,t}\, dt = \lim\limits_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s}\, t\, e^{-st} - \frac{1}{s^2}\, e^{-st} \right]_0^b =$

$\lim\limits_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{s}\, b\, e^{-sb} - \frac{1}{s^2}\, e^{-sb} + \frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{s^2}$

Porque si $s > 0$:

$\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\, b\, e^{-sb} = -\frac{1}{s} \lim\limits_{b\to\infty} b\, e^{-sb} = -\frac{1}{s} \lim\limits_{b\to\infty} \frac{b}{e^{sb}} = -\frac{1}{s} \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{s\, e^{sb}} = 0$

$\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{1}{s^2}\, e^{-sb} = -\frac{1}{s^2} \lim\limits_{b\to\infty} e^{-sb} = 0$

Finalmente, $F(s) = \frac{1}{s^2}$ ❑

5) Si f' es continua en $[a, b]$, entonces la longitud de arco L de la curva $y = f(x),\ a \leq x \leq b$ es $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Un cable telefónico que cuelga entre dos postes ubicados en $x = -b$ y $x = b$ tiene la forma de una catenaria de ecuación $y = a\, cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Obtenga el largo del cable.

(12 puntos)

<u>**Solución:**</u>

$$y \equiv f(x) = a\, cosh\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow y' \equiv f'(x) = a\, \frac{1}{a} senh\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow y' = senh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Recordemos que :

$cosh^2(z) - senh^2(z) = 1,$ es decir, $1 + senh^2(z) = cosh^2(z)$

Luego

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + senh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \sqrt{cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$L = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + senh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx = \int_{-b}^{b} cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx = a\, senh\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{-b}^{b} =$$

$$asenh\left(\frac{b}{a}\right) - asenh\left(\frac{-b}{a}\right) = asenh\left(\frac{b}{a}\right) + asenh\left(\frac{b}{a}\right) = 2a\, senh\left(\frac{b}{a}\right) \quad \square$$