UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 1 CÁLCULO II - CÁLCULO INTEGRAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 2 HORAS FECHA : Mi 25/10/06

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas**.

$a)$ __F__ $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = 0$
Justificación:
La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es discontinua en el punto $x = 0 \in [-1, 1]$, por lo que la función no es integrable en todo el intervalo.$\square$

$b)$ __F__ La integral $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}\, dx$ no se puede resolver usando sustitución
Justificación:
Si consideramos la sustitución $u = 1 - 2x^2$, entonces $du = -4x\, dx$ y $x\, dx = -\frac{1}{4} du$
Notemos que $x^2 = \frac{1-u}{2}$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}\, dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x^2}}\, x\, dx = -\frac{1}{4}\int \frac{\frac{1-u}{2}}{u^{1/2}}\, du = -\frac{1}{8}\int \frac{1-u}{u^{1/2}}\, du =$$

$$-\frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{u^{1/2}} - \frac{u}{u^{1/2}}\right] du = -\frac{1}{8}\int u^{-1/2} du + \frac{1}{8}\int u^{1/2}\, du =$$

$$-\frac{1}{4}u^{1/2} + \frac{1}{12}u^{3/2} + c = -\frac{1}{4}(1-2x^2)^{1/2} + \frac{1}{12}(1-2x^2)^{3/2} + c\square$$

$c)$ __V__ Si una partícula se mueve en línea recta con aceleración constante a, velocidad inicial v_0, y desplazamiento inicial d_0, entonces la velocidad media en el intervalo $[0, 10]$ es igual a la velocidad en $t = 5$
Justificación:
Recordemos que $v'(t) = a(t)$, luego $v(t) = \int a(t)\, dt$
$v(t) = \int a(t)\, dt = \int a\, dt = a \int dt = at + c_1$
$v(0) = v_0 \Rightarrow a(0) + c_1 = v_0 \Rightarrow c_1 = v_0$
$\therefore\ v(t) = a\, t + v_0$

Ahora, la velocidad media está dada por :
$v_M = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} v(t)\, dt = \frac{1}{10} \int_0^{10} (at + v_0)\, dt = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}at^2 + v_0 t\right)\Big|_0^{10} =$

$\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}10^2 a + 10\, v_0\right) = 5a + v_0$
La velocidad evaluada en $t = 5$ es $v(5) = 5a + v_0$
De lo anterior concluimos que $v_M = v(5)$. $\square$

d) __F__ La ecuación diferencial $f''(x) = 2x + 3sen(x)$, con $f'(0) = 2$ y $f(\pi) = 1$ no posee solución.
Justificación:
$f''(x) = 2x + 3sen(x) \Rightarrow \int f''(x)\, dx = \int \big(2x + 3sen(x)\big)\, dx \Rightarrow$
$f'(x) = x^2 - 3cos(x) + c_1$

Ahora : $f'(0) = 2 \Rightarrow 0^2 - 3cos(0) + c_1 = 2 \Rightarrow -3 + c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = 5$
Por lo tanto, $f'(x) = x^2 - 3cos(x) + 5$

$\int f'(x)\, dx = \int \big(x^2 - 3cos(x) + 5\big)\, dx \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\, sen(x) + 5x + c_2$

Ahora : $f(\pi) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi^3 - 3\, sen(\pi) + 5\pi + c_2 = 1 \Rightarrow$

$\frac{1}{3}\pi^3 + 5\pi + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 - 5\pi - \frac{1}{3}\pi^3$

$\therefore\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\, sen(x) + 5x + 1 - 5\pi - \frac{1}{3}\pi^3$

Esto significa que la ecuación diferencial dada posee la solución :
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\, sen(x) + 5x + 1 - 5\pi - \frac{1}{3}\pi^3$ $\square$

e) __F__ $\int_{-2}^{2} |2x + 1|\, dx < 0$
Justificación:
$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & ,\ \text{si } 2x+1 \geq 0 \\ -2x-1 & ,\ \text{si } 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & ,\ \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & ,\ \text{si } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$\therefore\ \int_{-2}^{2} |2x+1|\, dx = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (-2x-1)\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{2} (2x+1)\, dx =$
$(-x^2 - x)\Big|_{-2}^{-\frac{1}{2}} + (x^2 + x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{2} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (-4 + 2) + (4 + 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) =$
$\frac{1}{4} + 2 + 6 + \frac{1}{4} = \frac{17}{2} > 0$ $\square$

f) __F__ $f(x) = \int \frac{1}{1+2x^2}\, dx$ es discontinua en $x = \frac{\pi}{2}$
Justificación:
$f(x) = \int \frac{1}{1+2x^2}\, dx = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}\,x)^2}\, dx$
Sea $u = \sqrt{2}\,x$, luego $du = \sqrt{2}\, dx$ y $dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\, du$
$f(x) = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}\,x)^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+u^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg(u) + c =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\, Arctg(\sqrt{2}\,x) + c$

Finalmente, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, Arctg(\sqrt{2}\,x) + c$ es continua en $x = \frac{\pi}{2}$.

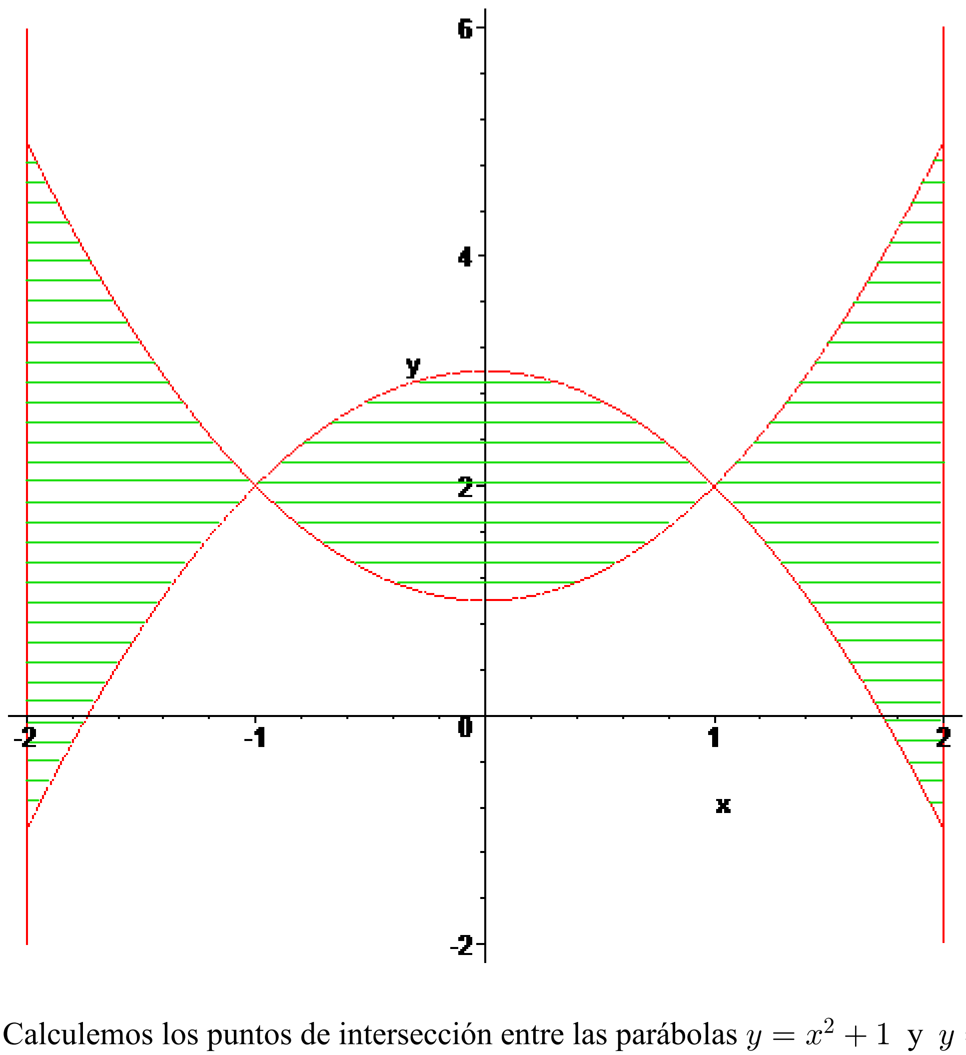
Notemos que : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, Arctg(\sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}) + c = f(\frac{\pi}{2})$ $\square$

(36 puntos).

(2) Obtenga y grafique el área de la región acotada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x^2$, $x = -2$ y $x = 2$

(24 puntos).

<u>**Solución:**</u>



Calculemos los puntos de intersección entre las parábolas $y = x^2 + 1$ y $y = 3 - x^2$

$$x^2 + 1 = 3 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Para $x_1 = 1,$ se tiene que $y_1 = 1^2 + 1 = 2$

Para $x_2 = -1,$ se tiene que $y_2 = (-1)^2 + 1 = 2$

Los puntos de intersección entre las parábolas son : $P_1 = (1,2)$ y $P_2 = (-1,2)$

La recta $x = -2,$ intersecta a la parábola $y = x^2 + 1$ en el punto $P_3 = (-2,5);$ y a la parábola $y = 3 - x^2$ en el punto $P_4 = (-2, -1)$

La recta $x = 2,$ intersecta a la parábola $y = x^2 + 1$ en el punto $P_3 = (2,5);$ y a la parábola $y = 3 - x^2$ en el punto $P_4 = (2, -1)$

Notemos que $A_T = A_1 + A_2 + A_3,$ donde A_T es el área total, A_1 el área entre las parábolas desde la recta $x = -2$ hasta el punto $P_2,$ A_2 el área encerrada por las parábolas entre P_2 y $P_1,$ y A_3 el área entre las parábolas desde P_1 hasta la recta $x = 2.$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} \left[(x^2+1) - (3-x^2)\right]dx = \int_{-2}^{-1} \left[x^2 + 1 - 3 + x^2\right]dx =$$

$$\int_{-2}^{-1} \left[2x^2 - 2\right]dx = 2\int_{-2}^{-1} x^2 dx \; - 2\int_{-2}^{-1} dx = \frac{2}{3}\,x^3\Big|_{-2}^{-1} - 2x\Big|_{-2}^{-1} =$$

$$\frac{2}{3}\left[(-1)^3 - (-2)^3\right] - 2(-1+2) = \frac{2}{3}\left[-1+8\right] - 2(1) = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} \left[(3-x^2) - (x^2+1)\right]dx = \int_{-1}^{1} \left[3 - x^2 - x^2 - 1\right]dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[2 - 2x^2\right]dx = 2x\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\,x^3\Big|_{-1}^{1} = 2(1+1) - \frac{2}{3}(1+1) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$A_3 = A_1 = \int_{1}^{2} \left[(x^2+1) - (3-x^2)\right]dx = \frac{2}{3}\,x^3\Big|_{1}^{2} - 2x\Big|_{1}^{2} =$$

$$\frac{2}{3}(8-1) - 2(2-1) = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$$

Observe que podríamos haber usado el hecho que $A_1 = A_3$ por simetría.

$$\therefore A_T = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{24}{3} = 8 \;\square$$