

**PAUTA CERTAMEN N° 1 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS

FECHA : Ma 01/09/26

1) Resuelva $\int x 5^x dx$

(15 puntos)

Solución:

Recordemos que $(5^x)' = \ln(5) 5^x$, luego $\int 5^x dx = \frac{1}{\ln(5)} 5^x$

Utilicemos integración por partes.

$$p' = 5^x \Rightarrow p = \frac{1}{\ln(5)} 5^x$$

$$q = x \Rightarrow q' = 1$$

$$\int x 5^x dx = \frac{1}{\ln(5)} x 5^x - \frac{1}{\ln(5)} \int 5^x dx = \frac{1}{\ln(5)} x 5^x - \frac{1}{\ln(5)} \frac{1}{\ln(5)} 5^x + c = \frac{1}{\ln(5)} x 5^x - \frac{1}{[\ln(5)]^2} 5^x + c \quad \square$$

2) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |z^2 - 1| dz$

(15 puntos)

Solución:

En este ejercicio debemos analizar el argumento del valor absoluto.

$$\text{Notemos que } z^2 - 1 = 0 \Rightarrow (z - 1)(z + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

	$z < -1$	$z = -1$	$-1 < z < 1$	$z = 1$	$z > 1$
$z - 1$	—	— 2	—	0	+
$z + 1$	—	0	+	2	+
$(z - 1)(z + 1)$	+	0	—	0	+

De la tabla anterior observamos que $z^2 - 1$ es positivo si $z < -1$ ó $z > 1$ y es negativo si $-1 < z < 1$

Otra forma de saber el comportamiento del argumento del valor absoluto es resolver las inecuaciones $z^2 - 1 > 0$ y $z^2 - 1 < 0$, que conducen a los mismos resultados de la tabla.

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |z^2 - 1| dz = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-1} (z^2 - 1) dz + \int_{-1}^1 -(z^2 - 1) dz + \int_1^{\frac{\pi}{3}} (z^2 - 1) dz =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{-1} z^2 dz - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-1} dz + \int_{-1}^1 -z^2 dz + \int_{-1}^1 dz + \int_1^{\frac{\pi}{3}} z^2 dz - \int_1^{\frac{\pi}{3}} dz =$$

$$\left. \frac{z^3}{3} \right|_{-\frac{\pi}{3}}^{-1} - \left. z \right|_{-\frac{\pi}{3}}^{-1} - \left. \frac{z^3}{3} \right|_{-1}^1 + \left. z \right|_{-1}^1 + \left. \frac{z^3}{3} \right|_1^{\frac{\pi}{3}} - \left. z \right|_1^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{\frac{\pi^3}{27}}{3} + 1 - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 1 + \frac{\frac{\pi^3}{27}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3} + 1 =$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{\pi^3}{81} + 1 - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 1 + \frac{\pi^3}{81} - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3} + 1 = \frac{2\pi^3}{81} - \frac{2\pi}{3} + \frac{8}{3} \quad \square$$

3) Resuelva la EDO $y' = \frac{r}{1+r^2} - r e^r$

(15 puntos)

Solución:

$$y' = \frac{r}{1+r^2} - r e^r \Rightarrow \int y' dr = \int \frac{r}{1+r^2} dr - \int r e^r dr$$

Para calcular $\int \frac{r}{1+r^2} dr$ usemos la sustitución $V = 1 + r^2$

$$V = 1 + r^2 \Rightarrow dV = 2r dr \Rightarrow r dr = \frac{1}{2} dV$$

$$\int \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{1}{2} \int \frac{1}{V} dV = \frac{1}{2} \ln|V| = \frac{1}{2} \ln|1+r^2| = \frac{1}{2} \ln(1+r^2)$$

Por otro lado, para calcular la integral $\int r e^r dr$ usemos integración por partes

$$p' = e^r \Rightarrow p = e^r$$

$$q = r \Rightarrow q' = 1$$

$$\int r e^r dr = r e^r - \int e^r dr = r e^r - e^r$$

Reemplazando lo anterior en $\int y' dr = \int \frac{r}{1+r^2} dr - \int r e^r dr$, se tiene

$$y(r) = \frac{1}{2} \ln(1+r^2) - r e^r + e^r + c \quad \square$$

- 4) Obtenga el valor medio de la función $f(t) = t \operatorname{sen}(2t)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$
(15 puntos)

Solución:

Recordemos que el valor medio de una función $f(t)$ en el intervalo $[a, b]$ es

$$f_{prom} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Calculemos $\int t \operatorname{sen}(2t) dt$ usando integración por partes

$$p' = \operatorname{sen}(2t) \Rightarrow p = -\frac{1}{2} \cos(2t)$$

$$q = t \Rightarrow q' = 1$$

$$\begin{aligned} \int t \operatorname{sen}(2t) dt &= -\frac{1}{2} t \cos(2t) + \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt = -\frac{1}{2} t \cos(2t) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) = \\ &= -\frac{1}{2} t \cos(2t) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) \end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \operatorname{sen}(2t) dt = \left[-\frac{1}{2} t \cos(2t) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2t) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \cos(\pi) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(\pi) = \frac{\pi}{4}$$

$$f_{prom} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \operatorname{sen}(2t) dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \quad \square$$