

**PAUTA CERTAMEN N° 1 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS

FECHA : Ma 02/09/25

1) Resuelva $\int \text{sen}(\sqrt{t}) dt$

(15 puntos)

Solución:

Sea $V = \sqrt{t}$

$$V = \sqrt{t} \Rightarrow dV = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \Rightarrow 2\sqrt{t} dV = dt \Rightarrow 2V dV = dt$$

$$\int \text{sen}(\sqrt{t}) dt = \int \text{sen}(V) 2V dV = 2 \int V \text{sen}(V) dV \quad (*)$$

Resolvamos la integral $\int V \text{sen}(V) dV$, usando integración por partes.

$$p' = \text{sen}(V) \Rightarrow p = -\cos(V)$$

$$q = V \Rightarrow q' = 1$$

$$\int V \text{sen}(V) dV = -V \cos(V) + \int \cos(V) dV = -V \cos(V) + \text{sen}(V)$$

Reemplazando este resultado en (*) se tiene:

$$\begin{aligned} \int \text{sen}(\sqrt{t}) dt &= 2 \int V \text{sen}(V) dV = -2V \cos(V) + 2 \text{sen}(V) + c = \\ &= -2\sqrt{t} \cos(\sqrt{t}) + 2 \text{sen}(\sqrt{t}) + c \end{aligned}$$

Finalmente, $\int \text{sen}(\sqrt{t}) dt = -2\sqrt{t} \cos(\sqrt{t}) + 2 \text{sen}(\sqrt{t}) + c$ $\square$

2) Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^5(x) \sec(x) \, dx$

(15 puntos)

Solución:

Resolvamos la integral indefinida $\int \operatorname{tg}^5(x) \sec(x) \, dx$

$$\int \operatorname{tg}^5(x) \sec(x) \, dx = \int \operatorname{tg}^2(x) \operatorname{tg}^2(x) \operatorname{tg}(x) \sec(x) \, dx =$$

$$\int (\sec^2(x) - 1)(\sec^2(x) - 1) \operatorname{tg}(x) \sec(x) \, dx$$

Sea $M = \sec(x)$

$$M = \sec(x) \Rightarrow dM = \operatorname{tg}(x) \sec(x) \, dx$$

$$\int (\sec^2(x) - 1)(\sec^2(x) - 1) \operatorname{tg}(x) \sec(x) \, dx =$$

$$\int (M^2 - 1)(M^2 - 1) dM = \int (M^4 - 2M^2 + 1) dM =$$

$$\int M^4 dM - 2 \int M^2 dM + \int dM = \frac{1}{5} M^5 - \frac{2}{3} M^3 + M + c =$$

$$\frac{1}{5} \sec^5(x) - \frac{2}{3} \sec^3(x) + \sec(x) + c$$

Ahora calculemos la integral definida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^5(x) \sec(x) \, dx = \left[\frac{1}{5} \sec^5(x) - \frac{2}{3} \sec^3(x) + \sec(x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$\frac{1}{5} \sec^5\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{3} \sec^3\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{5} \sec^5(0) + \frac{2}{3} \sec^3(0) - \sec(0) =$$

$$\frac{1}{5} 2^5 - \frac{2}{3} 2^3 + 2 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{32}{5} - \frac{16}{3} + 2 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{38}{15}$$

Finalmente, $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^5(x) \sec(x) \, dx = \frac{38}{15} \quad \square$

3) Obtenga $\int \operatorname{sen}(p) \ln(\cos(p)) \, dp$

(15 puntos)

Solución:

Sea $v = \cos(p)$

$$v = \cos(p) \Rightarrow dv = -\operatorname{sen}(p) \, dp \Rightarrow -dv = \operatorname{sen}(p) \, dp$$

$$\int \sin(p) \ln(\cos(p)) dp = - \int \ln(v) dv = -v \ln|v| + v + c =$$

$$- \cos(p) \ln|\cos(p)| + \cos(p) + c$$

Finalmente, $\int \sin(p) \ln(\cos(p)) dp = - \cos(p) \ln|\cos(p)| + \cos(p) + c$ $\square$

4) Obtenga el valor medio de la función $f(r) = \frac{r^2}{1+r^2}$ en el intervalo $[0, 1]$
(15 puntos)

Solución:

El valor medio de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es

$$vm = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(r) dr$$

Calculemos $\int \frac{r^2}{1+r^2} dr$

Para ello debemos dividir los polinomios primero

$$\begin{array}{r} r^2 : r^2 + 1 = 1 \\ (-) r^2 + (-) 1 \\ \hline -1 \end{array}$$

Lo anterior significa que $\frac{r^2}{1+r^2} = 1 - \frac{1}{1+r^2}$

Luego, $\int \frac{r^2}{1+r^2} dr = \int \left[1 - \frac{1}{1+r^2} \right] dr = \int dr - \int \frac{1}{1+r^2} dr = r - \text{Arctg}(r)$

Calculemos ahora la integral definida $\int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2} dr$

$$\int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2} dr = (r - \text{Arctg}(r)) \Big|_0^1 = 1 - \text{Arctg}(1) + \text{Arctg}(0) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

El valor medio es : $vm = \frac{1}{1-0} \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2} dr = 1 - \frac{\pi}{4}$ $\square$