UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 1 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 04/09/24

1) Resuelva $\int e^{\sqrt{t}}\, dt$

(15 puntos)

Solución:
Sea $z = \sqrt{t}$
$z = \sqrt{t} \Rightarrow z^2 = t \Rightarrow 2z\, dz = dt$
$$\int e^{\sqrt{t}}\, dt = \int e^{z}\, 2z\, dz = 2\int e^{z}\, z\, dz \qquad (1)$$
Usemos integración por partes para calcular la integral $\int e^{z}\, z\, dz$
$p' = e^{z} \Rightarrow p = e^{z}$
$q = z \Rightarrow q' = 1$
$$\int e^{z}\, z\, dz = z\, e^{z} - \int e^{z}\, dz = z\, e^{z} - e^{z} + c$$
Reemplazando este resultado en (1) se tiene
$$\int e^{\sqrt{t}}\, dt = 2\int e^{z}\, z\, dz = 2\, z\, e^{z} - 2\, e^{z} + c = 2\,\sqrt{t}\; e^{\sqrt{t}} - 2\, e^{\sqrt{t}} + c \ \square$$

2) Resuelva $\int tg^3(x)\ dx$

(15 puntos)

Solución:
$$\int tg^3(x)\ dx = \int tg^2(x)\ tg(x)\ dx = \int \left[sec^2(x) - 1\right] tg(x)\ dx$$
$$= \int \left[sec^2(x) tg(x) - tg(x)\right] dx = \int sec^2(x)\ tg(x)\ dx - \int tg(x)\ dx$$

Para obtener la integral $\int sec^2(x)\ tg(x)\ dx$ consideremos la sustitución $u = tg(x)$, de donde $du = sec^2(x) dx$. Luego,

$\int sec^2(x)\ tg(x)\ dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + c_1 = \frac{1}{2}tg^2(x) + c_1$

Recordemos de la tabla de integrales básicas que $\int tg(x)\ dx\ =\ -\, ln|cos(x)| + c$ y se tiene que

$\int\ tg^3(x)\ dx = \int sec^2(x)\ tg(x)\ dx - \int tg(x)\ dx$

$= \frac{1}{2}\ tg^2(x) + c_1 + ln|cos(x)| - c_2 = \frac{1}{2}tg^2(x) + ln|cos(x)| + c$

Finalmente,

$\int tg^3(x)dx = \frac{1}{2}tg^2(x) + ln|cos(x)| + c,$

con c una constante real cualquiera. $\square$

3) Calcule $A = 4\ \int_0^a \sqrt{a^2\ -\ x^2}\ dx$ (Esta integral representa el área encerrada por la circunferencia con centro en el origen y radio $a,$ de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$)

(15 puntos)

Solución:

Si $x = a\, sen\,(\,\theta)$, entonces $dx = a\, cos\,(\,\theta)\, d\theta$

$x = 0 \Rightarrow 0 = a\, sen(\,\theta)\ \Rightarrow sen(\,\theta)\ = 0 \Rightarrow \theta = 0$ y

$x = a \Rightarrow a = a\, sen(\,\theta)\ \Rightarrow sen(\,\theta)\ = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

Luego

$A = 4\ \int_0^a \sqrt{a^2\ -\ x^2}\ dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\ -\ a^2 sen^2(\,\theta)}\ \ a\, cos(\,\theta)\, d\theta$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\,(1-\ sen^2(\,\theta))}\ \ a\, cos(\,\theta)\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\, cos^2(\,\theta)}\ \ a\, cos(\,\theta)\, d\theta$

$= 4a^{\,2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(\,\theta)\, d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 + cos\,(2\theta)}{2}\right] d\theta = 2\, a^2 \left[\theta + \frac{1}{2} sen\,(2\,\theta)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi a^2$

Finalmente,

$A = 4\ \int_0^a \sqrt{a^2\ -\ x^2}\ dx = \pi\ a^2$ $\square$

4) Calcule $\int\ \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\, dx$

(15 puntos)

Solución:

Sean $p(x) = x^3 + x + 1$ y $q(x) = x^2 + 1$. Como el grado de $p(x)$ es mayor que el grado de $q(x)$, debemos dividir para obtener

$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

con $grado(r(x)) < grado(q(x))$. Observe que $r(x)$ representa el resto de la división y $c(x)$ representa el cuociente.

Calculemos el cociente y el resto.

$x^3 + x + 1 : x^2 + 1 = x$

${}^{(-)}x^3 + {}^{(-)}x$

$0\,x^3 + 0\,x + 1$

De lo anterior concluimos que $r(x) = 1,$ y $c(x) = x$

Luego, $\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}$

$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx = \int \left[x + \frac{1}{x^2+1}\right] dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + Arctg(x) + c$

Finalmente,

$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + Arctg(x) + c$,

con c una constante real cualquiera. ❑