UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 7
CÁLCULO AVANZADO Y CÁLCULO INTEGRAL+EDO
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____CARRERA :________
FECHA DE ENTREGA : Viernes 08 de enero hasta las 18:00 horas.
FECHA : Mi 06/01/20

1) La ecuación $y'' + 4\ y' + 5y = tg(x)\,\frac{e^x}{x}$ se puede resolver usando coeficientes indeterminados

Solución:
No se puede resolver usando coeficientes indeterminados, porque la función $f(x)) = tg(x)\,\frac{e^x}{x}$ no es posible escribirla como combinación lineal de funciones polinomiales, o funciones seno o coseno, ni exponencial

Respuesta: Falso ☐

2) La solución obtenida mediante coeficientes indeterminados para la ecuación $y'' - \frac{4}{9}\,y = x^3 - 2$ es
Solución:
Resolvamos la ecuación homogénea asociada

$$y'' - \frac{4}{9}\,y = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{4}{9} = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow r = \pm\frac{3}{2}$$

$$y_h(x) = c_1 e^{-\frac{2x}{3}} + c_2\,e^{\frac{2x}{3}}$$

La solución particular puede ser $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$$y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y_p''(x) = 6Ax + 2B$$

$y'' - \frac{4}{9}\, y = 6Ax + 2B - \frac{4}{9}\,(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$

$= 6Ax + 2B - \frac{4}{9}Ax^3 - \frac{4}{9}Bx^2 - \frac{4}{9}Cx - \frac{4}{9}D$

$= -\frac{4}{9}Ax^3 - \frac{4}{9}Bx^2 + (6A - \frac{4}{9}C)x + (2B - \frac{4}{9}D) \equiv x^3 - 2 \Rightarrow$

$-\frac{4}{9}A = 1 \Rightarrow A = -\frac{9}{4}$

$-\frac{4}{9}B = 0 \Rightarrow B = 0$

$6A - \frac{4}{9}C = 0 \Rightarrow \frac{4}{9}C = 6A \Rightarrow C = \frac{54}{4}A = \frac{54}{4}\left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{486}{16} = -\frac{243}{8}$

$2B - \frac{4}{9}D = -2 \Rightarrow \frac{4}{9}D = 2B + 2 \Rightarrow \frac{4}{9}D = 2 \Rightarrow D = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

Luego $y_p(x) = -\frac{9}{4}x^3 - \frac{243}{8}x + \frac{9}{2}$

Respuesta: $y(x) = c_1 e^{-\frac{2x}{3}} + c_2\, e^{\frac{2x}{3}} - \frac{9}{4}x^3 - \frac{243}{8}x + \frac{9}{2}$ ❑

3) La solución de $y'' - 2\,y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$ es

Solución:

$y'' - 2\,y' + y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$

$y_h(x) = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x$

$y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = x\, e^x$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x\, e^x \\ e^x & e^x + x\, e^x \end{vmatrix} = e^{2x} + x\, e^{2x} - x\, e^{2x} = e^{2x} \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} e^x & x\, e^x \\ e^x & e^x + x\, e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{1+x^2} \end{bmatrix}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\, e^x \\ \frac{e^x}{1+x^2} & e^x + x\, e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = -\frac{\frac{x\, e^{2x}}{1+x^2}}{e^{2x}} = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow c_1(x) = -\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = -\frac{1}{2} ln(1 + x^2)$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{\frac{e^{2x}}{1+x^2}}{e^{2x}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow c_2(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = Arctg(x)$$

$$y_p(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x)$$

$$= -\tfrac{1}{2}ln(1+x^2)\,e^x + x\,e^x\,Arctg(x)$$

Respuesta: $y(x) = e^x(c_1 + c_2\,x - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + x\,Arctg(x))$ ❑

4) $\displaystyle\int_R\int x^2y\,dA$ es mayor que $\displaystyle\int_R\int y\ \ sen(x)\,dA$, donde R es la región de vértices $(-1,0)$, $(-1,5)$, $(1,5)$ y $(1,0)$

Solución:

Notamos que $-1 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 5$

$$\int_R\int x^2y\,dA = \int_{-1}^{1}\int_0^5 x^2y\,dy\,dx = \frac{25}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{25}{2}\,\frac{1}{3}\,x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{25}{6}(2) = \frac{25}{3}$$

$$\int_0^5 x^2y\,dy = x^2\,\frac{1}{2}\,y^2\Big|_0^5 = \frac{25}{2}x^2$$

$$\int_R\int y\ sen(x)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_0^5 y\,sen(x)\,dy\,dx = \frac{25}{2}\int_{-1}^{1} sen(x)\ dx$$

$$= -\frac{25}{2}cos(x)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{25}{2}(cos(1) - cos(-1)) = -\frac{25}{2}(cos(1) - cos(1)) = 0$$

$$\int_0^5 y\,sen(x)\,dy = sen(x)\ \frac{1}{2}\,y^2\Big|_0^5 = \frac{25}{2}sen(x)$$

$$\int_R\int x^2y\,dA = \frac{25}{3} > \int_R\int y\ sen(x)\,dA = 0$$

Respuesta: Verdadero ❑

5) Al usar el método de variación de parámetros para resolver la ecuación $y'' - 4\,y' + 4\,y = e^{x^2}$ se obtiene el sistema

Solución:

$y'' - 4\,y' + 4\,y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2 = r_2$

$y_h(x) = c_1\,e^{2x} + c_2\,x\,e^{2x}$

$y_1(x) = x\,e^{2x}$ y $y_2(x) = e^{2x}$

$$\begin{bmatrix} x\,e^{2x} & e^{2x} \\ e^{2x} + 2x\,e^{2x} & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{x^2} \end{bmatrix}$$

$c_1'\,x\,e^{2x} + c_2'\,e^{2x} = 0$
$(e^{2x} + 2x\,e^{2x})\,c_1' + 2\,c_2'\,e^{2x} = e^{x^2}$

$c_1'\,x\,e^{2x} + c_2'\,e^{2x} = 0$
$(1+2x)\,c_1'\ e^{2x} + 2\,c_2'\,e^{2x} = e^{x^2}$

Respuesta:

$c_1'\,x\,e^{2x} + c_2'\,e^{2x} = 0$
$(1+2x)\,c_1'\ e^{2x} + 2\,c_2'\,e^{2x} = e^{x^2}$ ❑

6) El valor promedio exacto de $f(x,y) = e^x - y$ en la región $[0,1] \times [0,3]$ es
Solución:

$$Valor_{prom} = \frac{1}{Area(R)} \int_R\!\!\int f(x,y)\,dA = \frac{1}{3}\int_0^1\!\!\int_0^3 (e^x - y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(3\,e^x - \frac{9}{2}\right)dx = e^x\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\,x\Big|_0^1 = e - 1 - \frac{3}{2} = e - \frac{5}{2}$$

$$\int_0^3 (e^x - y)\,dy = e^x\,y\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\,y^2\,\Big|_0^3 = 3\,e^x - \frac{9}{2}$$

$Valor_{prom} = e - \frac{5}{2}$

Respuesta: Ninguna de las otras alternativas ❑