

**PAUTA TEST N° 4 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 20 MINUTOS

FECHA : Ju 11/06/26

1) Resuelva $y'' - 5y' + 4y = 6e^{4x}$

(30 puntos)

Solución:

Resolvamos en primer lugar la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' - 5y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} r_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ r_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Luego : $y_h(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^x$

Usemos el método de los coeficientes indeterminados para obtener la solución particular $y_p(x)$

Dado que e^{4x} aparece en la solución homogénea y además participa en la función $f(x)$, entonces $y_p(x) = (Ax + B) e^{4x}$

$$y_p'(x) = A e^{4x} + 4(Ax + B) e^{4x}$$
$$y_p''(x) = 4A e^{4x} + 4A e^{4x} + 16(Ax + B) e^{4x}$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación diferencial no homogénea, se tiene

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p =$$
$$4A e^{4x} + 4A e^{4x} + 16(Ax + B) e^{4x} - 5A e^{4x} - 20(Ax + B) e^{4x} + 4(Ax + B) e^{4x} =$$
$$3A e^{4x} \equiv 6 e^{4x} \Rightarrow 3A = 6 \Rightarrow A = 2$$

La solución particular es $y_p(x) = 2x e^{4x}$, asumiendo que $B = 0$.

La solución de la edo no homogénea es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^x + 2x e^{4x} \quad \square$$

2) Resuelva el P.V.I. $y'' - 2y' + 2y = 2x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

(30 puntos)

Solución:

Resolvamos en primer lugar la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2(1 \pm i)}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 + i \\ r_2 = 1 - i \end{cases}$$

Luego $y_h(x) = e^x(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x))$

Usemos el método de los coeficientes indeterminados para obtener la solución particular $y_p(x)$

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_p'(x) = 2Ax + B$$

$$y_p''(x) = 2A$$

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = 2A - 4Ax - 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C =$$

$$2Ax^2 + (-4A + 2B)x + (2A - 2B + 2C) \equiv 2x^2 \Rightarrow$$

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

$$-4A + 2B = 0 \Rightarrow B = 2A = 2$$

$$2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow C = B - A = 2 - 1 = 1$$

De donde tenemos que $y_p(x) = x^2 + 2x + 1$

La solución de la edo no homogénea es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)) + x^2 + 2x + 1$$

Calculemos la derivada de la función anterior para ocupar las condiciones iniciales

$$y'(x) = e^x(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)) + e^x(-c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)) + 2x + 2$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow c_1 + c_2 + 2 = -1 \Rightarrow c_2 = -3$$

Finalmente, la solución del P.V.I. es

$$y(x) = -3e^x \sin(x) + x^2 + 2x + 1 \quad \square$$