UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 3 CÁLCULO AVANZADO

INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Mi 08/11/23**

Resuelva la EDO $\quad (y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0$

(60 puntos)

Solución:

Observamos que $M(x,y) = y+\sqrt{x^2+y^2}$ es homogéneo de grado 1 y $N(x,y) = -x$ es también homogéneo de grado 1, por lo que la ecuación dada es de coeficientes homogéneos.

Despejemos $\frac{dy}{dx}$ de $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0$

$(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0 \Rightarrow (y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx = x\,dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

Sea $v = \frac{y}{x}$

$v = \frac{y}{x} \Rightarrow v\,x = y \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{dy}{dx}$

Cambiemos de variable dependiente y a v

$\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{v\,x+\sqrt{x^2+(v\,x)^2}}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{v\,x+\sqrt{x^2+v^2\,x^2}}{x}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{v\,x+\sqrt{x^2(1+v^2)}}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{v\,x+x\sqrt{1+v^2}}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{x(v+\sqrt{1+v^2})}{x}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = v+\sqrt{1+v^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \sqrt{1+v^2} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = ln(x) + c \qquad (*)$

Obtengamos la integral $\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$ usando la sustitución trigonométrica $v = tg(\alpha)$

$v = tg(\alpha) \Rightarrow dv = sec^2(\alpha)\,d\alpha$

$v = tg(\alpha) \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{sec^2(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}} = \frac{sec^2(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{sec^2(\alpha)}} = \frac{sec^2(\alpha)\,d\alpha}{sec(\alpha)} = sec(\alpha)\,d\alpha$

Luego $\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int sec(\alpha)\,d\alpha = ln(sec(\alpha)+tg(\alpha)) = ln(\sqrt{1+v^2}+v)$, pues si $v = tg(\alpha)$, entonces $sec(\alpha) = \sqrt{1+tg^2(\alpha)} = \sqrt{1+v^2}$

Reemplazando en $(*)$ se tiene

$\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = ln(x) + c \Rightarrow \qquad ln(\sqrt{1+v^2}+v) = ln(x) + c$

$\Rightarrow ln(\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}+\frac{y}{x}) = ln(x) + c$

La solución de $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0$ está dada en forma implícita por

$ln(\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}+\frac{y}{x}) = ln(x) + c \quad \square$