

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS

Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 3 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS

FECHA : Ma 29/04/25

Resuelva la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$

(60 puntos)

Solución:

Sea $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$. Luego $\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Tenemos que

$$\frac{dx}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} dx = \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{-2}{t^2-2t-1} dt$$

La integral que debemos resolver es $\int \frac{-2}{t^2-2t-1} dt$

Obtenemos las raíces del polinomio $t^2 - 2t - 1$

$$t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow t = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 + \sqrt{2} \\ t_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Usemos la descomposición en suma de fracciones parciales

$$\frac{-2}{t^2-2t-1} = \frac{-2}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{A}{(t-t_1)} + \frac{B}{(t-t_2)} \Rightarrow -2 = A(t-t_2) + B(t-t_1)$$

Démosle valores a t para obtener las constantes A y B

$$t = t_1 : -2 = A(t_1 - t_2) \Rightarrow A = \frac{-2}{t_1 - t_2} \Rightarrow A = \frac{-2}{1 + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}} \Rightarrow A = \frac{-2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = t_2 : -2 = B(t_2 - t_1) \Rightarrow B = \frac{-2}{t_2 - t_1} \Rightarrow B = \frac{-2}{1 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}} \Rightarrow B = \frac{-2}{-2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego

$$\int \frac{-2}{t^2-2t-1} dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{(t-t_1)} dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{(t-t_2)} dt = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|t-t_1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|t-t_2| + c$$

Finalmente, volviendo a la variable original, se tiene

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) - 1 - \sqrt{2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) - 1 + \sqrt{2} \right| + c \quad \square$$