UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 3 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Ju 12/05/22**

1) Resuelva la integral $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

(30 puntos)

Solución:

Escribamos $\frac{x^4}{x^4-1}$ como suma de fracciones parciales. Para ello, en primer lugar debemos divir, pues $gr(x^4) = 4 = gr(x^4 - 1)$

$x^4 : x^4 - 1 = 1$
${}^{(-)}x^{4(+)} - 1$
$--------$
1

Es decir, $\frac{x^4}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1}$

Ahora $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$\Rightarrow 1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$

$x = 1 : \; 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$x = -1 : 1 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$

$x = 0 : 1 = A - B - D \Rightarrow D = A - B - 1 \Rightarrow D = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 \Rightarrow D = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$x = 2 : 1 = 15A + 5B + 3(2C + D) \Rightarrow 1 = 15A + 5B + 6C + 3D$

$\Rightarrow C = \frac{1}{6}(1 - 15A - 5B - 3D) \Rightarrow C = \frac{1}{6}(1 - \frac{15}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4}) \Rightarrow C = 0$

Luego $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$

De donde,

$$\int \frac{1}{x^4-1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{4}\,ln(x-1) - \frac{1}{4}\,ln(x+1) - \frac{1}{2}\,Arctg(x) + c$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx = \int dx + \int \frac{1}{x^4-1}dx =$$

$$x + \frac{1}{4}\,ln(x-1) - \frac{1}{4}\,ln(x+1) - \frac{1}{2}\,Arctg(x) + c \quad \square$$

2) Calcule $\Gamma(3)$ si $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$

(30 puntos)

Solución:

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty t^2\,e^{-t}\,dt = \lim_{r\to\infty} \int_0^r t^2\,e^{-t}\,dt$$

Obtengamos la integral indefinida $\int t^2\,e^{-t}\,dt$ usando integración por partes

$p' = e^{-t} \Rightarrow p = -e^{-t}$

$q = t^2 \Rightarrow q' = 2\,t$

$$\int t^2\,e^{-t}\,dt = -\,t^2\,e^{-t} + 2\int t\,e^{-t}\,dt$$

Integrando por partes nuevamente

$p' = e^{-t} \Rightarrow p = -e^{-t}$

$q = t \Rightarrow q' = 1$

$$\int t\,e^{-t}\,dt = -\,t\,e^{-t} + \int e^{-t}\,dt = -\,t\,e^{-t} - e^{-t}$$

Reemplazando este último resultado en lo anterior

$$\int t^2\, e^{-t}\, dt \;=\; -\; t^2\, e^{-t} - 2\, t\, e^{-t} - 2\, e^{-t} = \; -\, e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$$

Luego $\displaystyle\int_0^r t^2\, e^{-t}\, dt = \; -\, e^{-t}(t^2 + 2t + 2)\Big|_0^r = \; -\, e^{-r}(r^2 + 2r + 2) + 2$

De donde se tiene que

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r t^2\, e^{-t}\, dt = \quad \lim_{r\to\infty} \big[-\, e^{-r}(r^2 + 2r + 2) + 2 \big] =$$

$$\lim_{r\to\infty} \; -\, e^{-r}(r^2 + 2r + 2) + \quad \lim_{r\to\infty} 2 \; = 0 + 2 = 2$$

Pues para calcular $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \; -\, e^{-r}(r^2 + 2r + 2) = \; - \lim_{r\to\infty} \tfrac{r^2+2r+2}{e^r}$ podemos usar la regla de L'Hopital, y obtenemos

$$\lim_{r\to\infty} \tfrac{r^2+2r+2}{e^r} \;=\; \lim_{r\to\infty} \tfrac{2r+2}{e^r} \;=\; \lim_{r\to\infty} \tfrac{2}{e^r} \;= 0$$

Finalmente, $\displaystyle\Gamma(3) = \int_0^\infty t^2\, e^{-t}\, dt = 2$ ❏