UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 3 CÁLCULO AVANZADO

INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 30/11/22

1) Resuelva las EDO siguientes:

$a)\quad y'' + 2\,y' = 1$

<u>Solución:</u>

$y'' + 2\,y' = 1$

Resolvamos la ecuación diferencial homogénea asociada $y'' + 2\,y' = 0$

$$y'' + 2\,y' = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \,-2 \end{cases}$$

Luego la solución de la ecuación homogénea es

$y_h(x) = c_1 \, + c_2\, e^{-2t}$

Obtengamos ahora una solución particular $y_p(x)$

Asumamos que $y_p(x)$ tiene la forma $y_p(x) = A + Bx$

$y_p(x) = A + Bx \Rightarrow y'_p(x) = B \Rightarrow y_p''(x) = 0$

Reemplazando en la ecuación diferencial original

$y_p''(x) + 2\,y'_p(x) = 1 \Rightarrow 0 + 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

De lo anterior la solución particular es $y_p(x) = A + \frac{1}{2}x$

Si consideramos $A = 0$, tenemos que $y_p(x) = \frac{1}{2}x$

Finalmente la solución de $y'' + 2\,y' = 1$ es

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \, + c_2\, e^{-2t} + \frac{1}{2}x$

con c_1 y c_2 constantes reales cualesquiera $\square$

$b)\quad y\,(6y^2 - x - 1)\,dx + 2\,x\,dy = 0$

<u>Solución:</u>

$y\,(6y^2 - x - 1)\,dx + 2\,x\,dy = 0 \Rightarrow (6y^3 - x\,y - y)\,dx + 2x\,dy = 0 \Rightarrow$

$2x\,dy = (y + x\,y - 6y^3)\,dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y + x\,y - 6y^3}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x\,y}{2x} - \frac{6y^3}{2x} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{y}{2} - \frac{3y^3}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\right) y - \frac{3}{x}\, y^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + 1\right) y = -\frac{3}{x}\, y^3$

La última expresión nos dice que estamos frente a una ecuación diferencial de Bernoulli con $N = 3$
Si consideramos la sustitución $z = y^{1-N} = y^{-2}$ se obtiene la ecuación diferencial
$\frac{dz}{dx} + (1-N)\, p(x)\, z = (1-N)\, q(x)$
con $p(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + 1\right)$, $q(x) = -\frac{3}{x}$ y $1 - N = -2$
Luego
$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{1}{x} + 1\right) z = \frac{6}{x} \Rightarrow z(x) = \frac{1}{e^{\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx}} \left[\int \frac{6}{x}\, e^{\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx}\, dx + c\right]$
Notemos que
$e^{\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx} = e^{ln(x)+x} = e^{ln(x)} e^x = x\, e^x$

Por lo tanto
$z(x) = \frac{1}{e^{\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx}} \left[\int \frac{6}{x}\, e^{\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx}\, dx + c\right] \Rightarrow z(x) = \frac{1}{x\, e^x}\left[\int \frac{6}{x}\, x\, e^x\, dx + c\right] \Rightarrow$
$z(x) = \frac{1}{x\, e^x}\left[6\int e^x\, dx + c\right] \Rightarrow z(x) = \frac{1}{x\, e^x}\left[6\, e^x + c\right] \Rightarrow z(x) = \frac{6}{x} + c\, \frac{1}{x\, e^x}$
Volvamos a la variable original recordando que $z = y^{-2}$, es decir $y^2 = \frac{1}{z}$
$y^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{\frac{6}{x} + c\, \frac{1}{x\, e^x}} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{\frac{6 + c\, e^{-x}}{x}} \Rightarrow y^2 = \frac{x}{6 + c\, e^{-x}}$
Finalmente la solución de la ecuación diferencial $y\,(6y^2 - x - 1)\, dx + 2\, x\, dy = 0$ está dada por $y^2 = \frac{x}{6 + c\, e^{-x}}$, con c una constante real cualquiera □

(30 puntos)

2) $\int_R\int (x - 3y)^2\, dA$, donde $R = \{(x,y)/\, 0 \le x \le 2\, ,\, 1 \le y \le 2\,\}$
Solución:
$\int_R\int (x-3y)^2\, dA = \int_1^2 \int_0^2 (x-3y)^2\, dx\, dy = \int_1^2 \int_0^2 (x^2 - 6\, xy + 9\, y^2)\, dx\, dy =$
$\int_1^2 (\frac{1}{3}\, x^3 - 3\, x^2\, y + 9\, y^2\, x)\Big|_0^2\, dy = \int_1^2 (\frac{8}{3} - 12\, y + 18\, y^2)\; dy =$
$(\frac{8}{3}\, y - 6\, y^2 + 6\, y^3)\Big|_1^2 = \frac{16}{3} - 24 + 48 - \frac{8}{3} + 6 - 6 = \frac{8}{3} + 24 = \frac{80}{3}$ □

(10 puntos)

3) La ecuación diferencial que describe la velocidad v de una masa, que cae sujeta a una resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea es
$m\, \frac{dv}{dt} = m\, g - k\, v$
donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad, y $g = 9.8\, \frac{m}{s^2}$

$a)$ Resuelva la ecuación diferencial anterior, sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$

$b)$ Obtenga la distancia d, medida desde el punto en que se suelta la masa, si $d(0) = 0$.

Solución:

$a)\ m\,\frac{dv}{dt} = m\,g - k\,v$

El enunciado nos dice que $m > 0$, pues es una masa. Podemos dividir la ecuación por m

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}\,v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}\,v = g$

Notamos que es una ecuación diferencial lineal con $p(t) = \frac{k}{m}$ y $q(t) = g$

La solución es

$$v(t) = e^{-\int p(t)\,dt}\left[\int e^{\int p(t)\,dt}\,q(t)\,dt + c\right] = e^{-\frac{k}{m}\,t}\left[g\int e^{\frac{k}{m}\,t}\,dt + c\right] =$$

$$e^{-\frac{k}{m}\,t}\left[g\,\frac{m}{k}\,e^{\frac{k}{m}\,t} + c\right] = \frac{g\,m}{k} + c\,e^{-\frac{k}{m}\,t}$$

Se sabe que $v(0) = v_0$, luego

$\frac{g\,m}{k} + c = v_0 \Rightarrow c = v_0 - \frac{g\,m}{k}$

$$v(t) = \frac{g\,m}{k} + \left(v_0 - \frac{g\,m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}\,t}$$

$$b)\ d(t) = \int v(t)\,dt \Rightarrow d(t) = \int\left[\frac{g\,m}{k} + \left(v_0 - \frac{g\,m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}\,t}\right]dt =$$

$$\frac{g\,m}{k}t + \left(v_0 - \frac{g\,m}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}\,t} + c_2$$

$$d(0) = 0 \Rightarrow \left(v_0 - \frac{g\,m}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}\right) + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \left(v_0 - \frac{g\,m}{k}\right)\left(\frac{m}{k}\right)$$

$$d(t) = \frac{g\,m}{k}t + \left(v_0 - \frac{g\,m}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}\,t} + \left(v_0 - \frac{g\,m}{k}\right)\left(\frac{m}{k}\right) \square$$

(20 puntos)