

**PAUTA CERTAMEN N° 3 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS

FECHA : Ju 25/06/26

1) Resuelva $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

(15 puntos)

Solución:

Resolvamos en primer lugar la edo homogénea asociada $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

Resolvamos ahora la edo no homogénea usando el método de variación de parámetros.

Notemos que $y_1(x) = e^{2x}$ y $y_2(x) = e^x$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = e^{3x} - 2e^{3x} = -e^{3x}$$

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \frac{1}{1+e^{-x}} & e^x \end{vmatrix}}{-e^{3x}} = \frac{e^x}{(1+e^{-x})e^{3x}} = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow u(x) = \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx = \int \frac{e^{-x} e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

Para resolver la integral consideremos el cambio de variable $P = e^{-x}$

$$P = e^{-x} \Rightarrow dP = -e^{-x} dx \Rightarrow e^{-x} dx = -dP$$

$$\int \frac{e^{-x} e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - \int \frac{P}{1+P} dP$$

Ahora

$$P : P + 1 = 1$$

$$(-)P + (-)1$$

$$\frac{P}{1+P} = 1 - \frac{1}{1+P}$$

$$\int \frac{P}{1+P} dP = \int dP - \int \frac{1}{1+P} dP = P - \ln|1+P|$$

$$\text{Luego } \int \frac{e^{-x} e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - \int \frac{P}{1+P} dP = \ln|1+P| - P = \ln|1+e^{-x}| - e^{-x}$$

Tenemos que $u_1(x) = \ln|1+e^{-x}| - e^{-x}$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^x & \frac{1}{1+e^{-x}} \end{vmatrix}}{-e^{3x}} = - \frac{e^{2x}}{(1+e^{-x})e^{3x}} = - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow u(x) = \int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

Sea $B = 1 + e^{-x}$, luego $dB = -e^{-x} dx$

$$\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int \frac{1}{B} dB = \ln|B| = \ln|1+e^{-x}|$$

Tenemos que $u_2(x) = \ln|1+e^{-x}|$

La solución particular es

$$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) = (\ln|1+e^{-x}| - e^{-x}) e^{2x} + e^x \ln|1+e^{-x}|$$

Finalmente, la solución de la edo no homogénea es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) =$$

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^x + (\ln|1+e^{-x}| - e^{-x}) e^{2x} + e^x \ln|1+e^{-x}| \quad \square$$

2) Resuelva $y'' + y = \cos(x)$

(15 puntos)

Solución:

En primer lugar debemos resolver la edo homogénea asociada $y'' + y = 0$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = i \\ r_2 = -i \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Usemos el método de los coeficientes indeterminados para obtener la solución particular. Dado que $f(x) = \cos(x)$ y esta función aparece en la solución homogénea, podemos considerar la solución particular

$$y_p(x) = Ax \cos(x) + Bx \sin(x)$$

$$y_p'(x) = A \cos(x) - Ax \sin(x) + B \sin(x) + Bx \cos(x)$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= -A \sin(x) - A \sin(x) - Ax \cos(x) + B \cos(x) + B \cos(x) - Bx \sin(x) \\ &= -2A \sin(x) + 2B \cos(x) - Ax \cos(x) - Bx \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p(x) &= \\ -2A \sin(x) + 2B \cos(x) - Ax \cos(x) - Bx \sin(x) + Ax \cos(x) + Bx \sin(x) &= \\ -2A \sin(x) + 2B \cos(x) \equiv \cos(x) \Rightarrow -2A = 0 \text{ y } 2B = 1 \Rightarrow A = 0 \text{ y } B = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La solución particular es $y_p(x) = \frac{1}{2} x \sin(x)$

Finalmente, la solución de la edo no homogénea es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2} x \sin(x) \quad \square$$

3) Calcule $\int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$

(15 puntos)

Solución:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dx = \int_0^1 (x+y)^{-2} dx = - (x+y)^{-1} \Big|_0^1 = - (1+y)^{-1} + y^{-1}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dx dy &= \int_1^2 (- (1+y)^{-1} + y^{-1}) dy = \\ \int_1^2 - (1+y)^{-1} dy + \int_1^2 y^{-1} dy &= \int_1^2 - \frac{1}{1+y} dy + \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \\ (- \ln|1+y| + \ln|y|) \Big|_1^2 &= - \ln(3) + \ln(2) + \ln(2) - \ln(1) = - \ln(3) + 2 \ln(2) \quad \square \end{aligned}$$

4) Compruebe que $u(x, t) = \sin(x) \cos(t) + \frac{1}{2}x^2$ es solución de la ecuación de onda no homogénea $u_{xx} - u_{tt} = 1$

(15 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sin(x) \cos(t) + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow u_x = \cos(x) \cos(t) + x \Rightarrow \\ u_{xx} &= - \sin(x) \cos(t) + 1 \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \sin(x) \cos(t) + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow u_t = - \sin(x) \sin(t) \Rightarrow u_{tt} = - \sin(x) \cos(t)$$

$$u_{xx} - u_{tt} = - \sin(x) \cos(t) + 1 + \sin(x) \cos(t) = 1 \quad \square$$