

**PAUTA CERTAMEN N° 3 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS

FECHA : Lu 21/07/25

1) Resuelva la ecuación diferencial ordinaria $y' + x y = x y^{-2}$

(15 puntos)

Solución:

Observamos que es una ecuación diferencial de Bernoulli, con $n = -2$,
 $p(x) = x$ y $q(x) = x$

Usando el cambio de variable $v = y^{1-n} = y^{1+2} = y^3$ convertimos la ecuación anterior en la lineal

$$\frac{dv}{dx} + 3p(x) v = 3q(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx} + 3x v = 3x \Rightarrow$$

$$v(x) = e^{-3 \int x dx} \left[\int 3x e^{3 \int x dx} dx + k \right] = e^{-3 \frac{x^2}{2}} \left[\int 3x e^{3 \frac{x^2}{2}} dx + k \right] =$$
$$e^{-\frac{3x^2}{2}} \left[\int 3x e^{\frac{3x^2}{2}} dx + k \right] = e^{-\frac{3x^2}{2}} \left[e^{\frac{3x^2}{2}} + k \right] = 1 + k e^{-\frac{3x^2}{2}}$$

$$v(x) = 1 + k e^{-\frac{3x^2}{2}} \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{v(x)} \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{1 + k e^{-\frac{3x^2}{2}}}$$

Notemos que $\int 3x e^{\frac{3x^2}{2}} dx = \int e^P dP = e^P = e^{\frac{3x^2}{2}}$ si $P = \frac{3x^2}{2}$ $\square$

2) Resuelva el PVI

$$y'' - y' - 2y = \operatorname{sen}(x)$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

(15 puntos)

Solución:

Resolvamos en primer lugar la ecuación diferencial homogénea asociada, es decir $y'' - y' - 2y = 0$

$$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ r_2 = \frac{1-3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

La solución de la homogénea es $y_h(x) = \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{-x}$

Por otro lado, dado que $f(x) = \text{sen}(x)$, una posible solución particular puede ser $y_p(x) = A \text{sen}(x) + B \cos(x)$

$$y_p(x) = A \text{sen}(x) + B \cos(x) \Rightarrow y_p'(x) = A \cos(x) - B \text{sen}(x) \Rightarrow$$

$$y_p''(x) = -A \text{sen}(x) - B \cos(x)$$

Reemplazando estos resultados en $y'' - y' - 2y = \text{sen}(x)$, se tiene que $y_p'' - y_p' - 2y_p =$

$$-A \text{sen}(x) - B \cos(x) - A \cos(x) + B \text{sen}(x) - 2A \text{sen}(x) - 2B \cos(x) =$$

$$(-A + B - 2A) \text{sen}(x) + (-B - A - 2B) \cos(x) =$$

$$(-3A + B) \text{sen}(x) + (-A - 3B) \cos(x) \equiv \text{sen}(x) \Rightarrow$$

$$-3A + B = 1 \Rightarrow -3(-3B) + B = 1 \Rightarrow 9B + B = 1 \Rightarrow 10B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{10}$$

$$-A - 3B = 0 \Rightarrow A = -3B \Rightarrow A = -\frac{3}{10}$$

$$\text{Luego } y_p(x) = -\frac{3}{10} \text{sen}(x) + \frac{1}{10} \cos(x)$$

La solución general de $y'' - y' - 2y = \text{sen}(x)$ es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{-x} - \frac{3}{10} \text{sen}(x) + \frac{1}{10} \cos(x)$$

Derivemos la función anterior

$$y'(x) = 2\alpha_1 e^{2x} - \alpha_2 e^{-x} - \frac{3}{10} \cos(x) - \frac{1}{10} \text{sen}(x)$$

Ahora usemos las condiciones iniciales para resolver el PVI

$$y(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{1}{10}$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 - \alpha_2 - \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{3}{10}$$

Sumando las ecuaciones anteriores se tiene

$$3\alpha_1 = \frac{2}{10} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{15}$$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{3}{10} \Rightarrow \alpha_2 = 2\alpha_1 - \frac{3}{10} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{15} - \frac{3}{10} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{6}$$

Finalmente, la solución del PVI es

$$y(x) = \frac{1}{15} e^{2x} - \frac{1}{6} e^{-x} - \frac{3}{10} \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{10} \cos(x) \quad \square$$

3) Un recipiente de mantequilla, inicialmente a $25^\circ C$, se coloca en el refrigerador, donde la temperatura es de $0^\circ C$. Se sabe que la temperatura de la mantequilla se redujo a $15^\circ C$ después de 20 minutos. ¿Cuándo estará a $5^\circ C$?

(15 puntos)

Solución:

$$T(0) = 25$$

$$T(20) = 15$$

$$M = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - M) \Rightarrow \frac{dT}{T-0} = k dt \Rightarrow \frac{dT}{T} = k dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T} = k \int dt \Rightarrow$$

$$\ln(T) = k t + c \Rightarrow T(t) = c_1 e^{kt}$$

$$T(0) = 25 \Rightarrow c_1 = 25$$

$$T(20) = 15 \Rightarrow 25 e^{20k} = 15 \Rightarrow e^{20k} = \frac{3}{5} \Rightarrow 20k = \ln\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{20} \approx -0.0255$$

$$T(t) = 5 \Rightarrow 25 e^{kt} = 5 \Rightarrow e^{kt} = \frac{1}{5} \Rightarrow kt = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{20}} \approx 63 \text{ minutos}$$

Finalmente el recipiente de mantequilla estará a $5^\circ C$ después de aproximadamente 63 minutos $\square$

4) Calcule:

$$a) f_x, f_{xy}, f_{yy} \text{ si } f(x, y) = x^2 \cos(xy)$$

(06 puntos)

Solución:

$$f_x = 2x \cos(xy) - x^2 y \operatorname{sen}(xy)$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = (2x \cos(xy) - x^2 y \operatorname{sen}(xy))_y =$$

$$-2x^2 \operatorname{sen}(xy) - x^2 \operatorname{sen}(xy) - x^3 y \cos(xy) = -3x^2 \operatorname{sen}(xy) - x^3 y \cos(xy)$$

$$f_y = -x^3 \operatorname{sen}(xy) \Rightarrow f_{yy} = (-x^3 \operatorname{sen}(xy))_y = -x^4 \cos(xy) \quad \square$$

$$b) \int_R \int y \operatorname{sen}(xy) dA, \text{ donde } R = [1, 2] \times [0, \pi]$$

(09 puntos)

Solución:

$$\int_R \int y \operatorname{sen}(xy) dA = \int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy) dx dy = \int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy) dx dy =$$

$$\int_0^\pi (-\cos(xy)) \Big|_1^2 dy = \int_0^\pi (-\cos(2y) + \cos(y)) dy = \left[-\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2y) + \operatorname{sen}(y) \right]_0^\pi$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\text{Finalmente, } \int_R \int y \operatorname{sen}(xy) dA = 0, \text{ con } R = [1, 2] \times [0, \pi] \quad \square$$