UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 3 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Mi 19/06/24**

1) Obtenga el valor exacto de $\int_R \int x\, sen(y)\, dA,$ donde $R = \{(x, y)/1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6}\}$

(10 puntos)

Solución:

$\int_R \int x\, sen(y)\, dA = \int_1^4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\, sen(y)\, dy\, dx = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \int_1^4 x\, dx =$
$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^4 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(16 - 1) = \frac{15}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, pues

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\, sen(y)\, dy = x \int_0^{\frac{\pi}{6}} sen(y)\, dy = -x\, cos(y)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -x\, cos(\frac{\pi}{6}) + x$
$cos(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} x + x = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x$ ❑

2) Resuelva las EDO siguientes:

$a)\ 3y'' - y' = 5y$

$b)\ y'' - 4\,y = x\, e^x;\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 0$

$c)\ y'' + y = sec(x),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(30 puntos)

Solución:

$a)\ 3y'' - y' = 5y \Rightarrow 3y'$
$' - y' - 5y = 0 \Rightarrow 3r^2 - r - 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1+60}}{6} \Rightarrow r = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{61}}{6} \\ \frac{1 - \sqrt{61}}{6} \end{cases}$

$y(x) = c_1\, e^{\frac{1+\sqrt{61}}{6}x} + c_2\, e^{\frac{1-\sqrt{61}}{6}x}$ ❑

$b)\; y'' - 4\,y = x\,e^x;\;\; y(0) = 0;\;\; y'(0) = 0$

Resolvamos primero la ecuación diferencial homogénea asociada $y'' - 4\,y = 0$

$y'' - 4\,y = 0 \Rightarrow r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -2 \end{cases}$

$y_h(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-2x}$

Usemos el método de los coeficientes indeterminados para obtener la solución particular $y_p(x)$

Supongamos que $y_p(x) = (Ax + B)\, e^x$

$y_p(x) = (Ax + B)\, e^x = Axe^x + Be^x \Rightarrow y_p'(x) = A\, e^x + (Ax + B)e^x \Rightarrow$

$y_p''(x) = Ae^x + A\, e^x + (Ax + B)e^x = 2Ae^x + Axe^x + Be^x$

Reemplazando en la edo no homogénea dada, se tiene

$y_p'' - 4\,y_p = x\,e^x \Rightarrow 2Ae^x + Axe^x + Be^x - 4Axe^x - 4Be^x = xe^x \Rightarrow$

$(2A - 3B)e^x - 3Axe^x = xe^x \Rightarrow$

$2A - 3B = 0 \Rightarrow B = \frac{2}{3}A = -\frac{2}{3}\frac{1}{3} = -\frac{2}{9}$

$-3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

Luego la solución particular es $y_p(x) = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) e^x$

La solución de la edo no homogénea es

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-2x} + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) e^x$

Consideremos las condiciones iniciales $y(0) = 0;\;\; y'(0) = 0$

$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{2}{9}$

$y'(x) = 2c_1\, e^{2x} - 2c_2\, e^{-2x} - \frac{1}{3}\, e^x + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) e^x \Rightarrow$

$y'(0) = 2c_1 - 2c_2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow 2c_1 - 2c_2 = \frac{5}{9}$

$c_1 + c_2 = \frac{2}{9} \Rightarrow 2c_1 + 2c_2 = \frac{4}{9}$

$2c_1 - 2c_2 = \frac{5}{9}$

$4c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}$

$c_1 + c_2 = \frac{2}{9} \Rightarrow c_2 = \frac{2}{9} - c_1 = \frac{2}{9} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{36}$

Finalmente la solución del PVI es

$y(x) = \frac{1}{4}\, e^{2x} - \frac{1}{36}e^{-2x} + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) e^x$ ❑

$c)\; y'' + y = sec(x),\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Resolvamos la edo homogénea asociada

$y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = i \\ r_2 = -i \end{cases}$

$y_h(x) = c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x)$

Usemos el método de variación de parámetros
La solución particular tiene la forma $y_p(x) = c_1(x)\, cos(x) + c_2(x) sen(x)$

$$\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -\,sen(x) & cos(x) \end{vmatrix} = cos^2(x) + sen^2(x) = 1 \neq 0$$

Usemos Cramer para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -\,sen(x) & cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ sec(x) \end{pmatrix}$$

$$c_1' = \begin{vmatrix} 0 & sen(x) \\ sec(x) & cos(x) \end{vmatrix} = -\,sec(x)\, sen(x) = -\,\frac{sen(x)}{cos(x)} = -\,tg(x) \Rightarrow$$

$$c_1(x) = -\int tg(x)\, dx = ln|cos(x)|$$

$$c_2' = \begin{vmatrix} cos(x) & 0 \\ -\,sen(x) & sec(x) \end{vmatrix} = sec(x)\, cos(x) = \frac{cos(x)}{cos(x)} = 1 \Rightarrow c_2(x) = \int dx = x$$

La solución particular es
$y_p(x) = ln|cos(x)|\, cos(x) + x\, sen(x)$
Finalmente la solución de la edo es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x) + ln|cos(x)|\, cos(x) + x\, sen(x) \square$$

3) Un asado de 2 kilos, inicialmente a $10°C$, se coloca en un horno a $190°C$ a las 11 de la mañana. Después de 75 minutos se observa que la temperatura del asado es de $52°C$. ¿Cuándo estará el asado a $66°C$?

(20 puntos)

Solución:

Este es un problema de calentamiento de Newton. Luego la ecuación diferencial tiene la forma

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A)$$

donde k es una constante, A es la temperatura ambiental, en grados celcius, T es la temperatura del objeto, en grados celcius, en un instante t, medido en minutos.
De acuerdo al enunciado tenemos que $T(0) = 10;\ A = 190;\ T(75) = 52$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 190) \Rightarrow \frac{dT}{(T-190)} = k\, dt \Rightarrow ln(T - 190) = kt + c \Rightarrow^{M=\pm e^c}$$

$$T - 190 = M\, e^{kt} \Rightarrow T(t) = M\, e^{kt} + 190$$

$T(0) = M + 190 = 10 \Rightarrow M = 10 - 190 \Rightarrow M = -180$
$T(t) = -180\, e^{kt} + 190$
$T(75) = -180\, e^{75\,k} + 190 = 52 \Rightarrow -180\, e^{75k} = 52 - 190 \Rightarrow$
$-180 e^{75k} = -138 \Rightarrow e^{75k} = \frac{138}{180} \Rightarrow 75\,k = ln\left(\frac{138}{180}\right) \Rightarrow k = \frac{ln\left(\frac{138}{180}\right)}{75}$
$T(t) = -180\, e^{\frac{ln\left(\frac{138}{180}\right)}{75} t} + 190$
Nos preguntan por el tiempo t tal que $T(t) = 66$
$T(t) = 66 \Rightarrow -180\, e^{\frac{ln\left(\frac{138}{180}\right)}{75} t} + 190 = 66 \Rightarrow -180\, e^{\frac{ln\left(\frac{138}{180}\right)}{75} t} = 66 - 190 \Rightarrow$
$e^{\frac{ln\left(\frac{138}{180}\right)}{75} t} = \frac{-124}{-180} \Rightarrow \frac{ln\left(\frac{138}{180}\right)}{75} t = ln\left(\frac{124}{180}\right) \Rightarrow t = 75 \frac{ln\left(\frac{124}{180}\right)}{ln\left(\frac{138}{180}\right)} \approx 75 \frac{0.372675285}{0.265703165} \approx$
$75(1.402600093) \approx 105$ minutos $= 1$ hora 45 minutos
El asado estará a $66°C$ a las 12 horas con 45 minutos. $\square$