UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 3 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 06/07/22

1) La ecuación $\frac{dy}{dx} = p(x)\,y^2 + q(x)\,y + r(x)$ se llama **ecuación de Ricatti.** Muestre que el cambio de variable $y = y_1 + \frac{1}{v}$ transforma la ecuación de Ricatti en una ecuación diferencial lineal para v, con y_1 una solución particular de la ecuación de Ricatti. Además resuelva la ecuación $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$ sabiendo que $\frac{1}{x}$ es una solución particular.

Solución:

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} \qquad (*)$$

Ahora, dado que y_1 es solución particular de la ecuación de Ricatti, se tiene

$$\frac{dy_1}{dx} = p(x)\,y_1^2 + q(x)\,y_1 + r(x) \qquad (**)$$

Por otro lado,

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2 + q(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + r(x) \Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = p(x)\,y_1^2 + 2\,p(x)\,y_1\frac{1}{v} + p(x)\frac{1}{v^2} + q(x)\,y_1 + q(x)\frac{1}{v} + r(x) \Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = (p(x)\,y_1^2 + q(x)\,y_1 + r(x)) + 2\,p(x)\,y_1\frac{1}{v} + p(x)\frac{1}{v^2} + q(x)\frac{1}{v} \Rightarrow^{De\,(*)\text{ y }(**)}$$
$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + 2\,p(x)\,y_1\frac{1}{v} + p(x)\frac{1}{v^2} + q(x)\frac{1}{v} \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = 2\,p(x)\,y_1\frac{1}{v} + p(x)\frac{1}{v^2} + q(x)\frac{1}{v} \Rightarrow^{Multiplicando\,por\,v^2}$$
$$-\frac{dv}{dx} = 2\,p(x)\,y_1\,v + p(x) + q(x)\,v \Rightarrow -\frac{dv}{dx} = (2\,p(x)\,y_1 + q(x))\,v + p(x) \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} + (2\,p(x)\,y_1 + q(x))\,v = -p(x) \qquad (***)$$

Esta última ecuación es lineal en v

Ahora, resolvamos la ecuación $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$, sabiendo que $y_1 = \frac{1}{x}$

Tenemos que $p(x) = 1,\ q(x) = -\frac{1}{x}$ y $r(x) = -\frac{1}{x^2}$

La ecuación lineal asociada es

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right)v = -1 \Rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}\,v = -1$$

$$v = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[-\int e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + c\right] = e^{-ln(x)}\left[-\int e^{ln(x)}dx + c\right] =$$

$e^{ln(x^{-1})}\left[-\int x\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[-\frac{x^2}{2} + c\right] = -\frac{x}{2} + \frac{c}{x} = \frac{2c-x^2}{2x}$

Finalmente, la solución de la edo original es $y(x) = y_1 + \frac{1}{v} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{2c-x^2}$ $\square$

(20 puntos)

2) $y'' - 4\,y = x\,e^x + cos(2x);\;\; y(0) = 0;\;\; y'(0) = 0$

Solución:

$$y'' - 4\,y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-2x}$$

Para la ecuación $y'' - 4\,y = x\,e^x$ podemos considerar $y_{p1} = (Ax+B)\,e^x$

$$y_{p1} = (Ax+B)\,e^x \Rightarrow y'_{p1} = A\,e^x + (Ax+B)\,e^x = (Ax+A+B)\,e^x \Rightarrow$$

$$y_{p1}'' = Ae^x + (Ax+A+B)\,e^x = (Ax+2A+B)\,e^x$$

Reemplazando en la ecuación diferencial $y'' - 4\,y = x\,e^x$ se tiene que

$$(Ax+2A+B)\,e^x - 4(Ax+B)\,e^x = x\,e^x \Rightarrow (2A-3B-3Ax)\,e^x = x\,e^x \Rightarrow$$

$$-3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

$$2A - 3B = 0 \Rightarrow B = \frac{2}{3}\,A \Rightarrow B = -\frac{2}{9}$$

Luego

$$y_{p1} = (Ax+B)\,e^x = \left(-\frac{1}{3}\,x - \frac{2}{9}\right)e^x$$

Para la ecuación $y'' - 4\,y = cos(2x)$ podemos considerar la solución particular $y_{p2} = C\,cos(2x) + D\,sen(2x)$

$$y_{p2} = C\,cos(2x) + D\,sen(2x) \Rightarrow y'_{p2} = -2C sen(2x) + 2D\,cos(2x) \Rightarrow$$

$$y_{p2}'' = -4C\,cos(2x) - 4D\,sen(2x)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial $y'' - 4\,y = cos(2x)$ se tiene que

$$-4C\,cos(2x) - 4D\,sen(2x) - 4C\,cos(2x) - 4D\,sen(2x) = cos(2x) \Rightarrow$$

$$-8C\,cos(2x) - 8D\,sen(2x) = cos(2x) \Rightarrow$$

$$-8C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{8}$$

$$-8D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Luego

$$y_{p2} = -\frac{1}{8}\,cos(2x)$$

La solución final es

$$y(x) = y_h(x) + y_{p1} + y_{p2} = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-2x} + \left(-\frac{1}{3}\,x - \frac{2}{9}\right)e^x - \frac{1}{8}\,cos(2x)$$

Consideremos ahora las condiciones iniciales

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - \frac{2}{9} - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{25}{72}$$

$y'(x) = 2\,c_1 e^{2x} - 2\,c_2\,e^{-2x} - \frac{1}{3}\; e^x + \left(-\frac{1}{3}\,x - \frac{2}{9} \right) e^x + \frac{1}{4}\,sen(2x)$

$y'(0) = 0 \Rightarrow 2\,c_1 - 2\,c_2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow 2\,c_1 - 2\,c_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \Rightarrow$

$2\,c_1 - 2\,c_2 = \frac{5}{9} \Rightarrow c_1 - c_2 = \frac{5}{18}$

$c_1 + c_2 = \frac{25}{72}$

$\Rightarrow$

$c_1 - c_2 = \frac{5}{18}$

$2\,c_1 = \frac{5}{8} \Rightarrow c_1 = \frac{5}{16}$

$c_2 = \frac{25}{72} - c_1 \Rightarrow c_2 = \frac{25}{72} - \frac{5}{16} \Rightarrow c_2 = \frac{5}{144}$

Finalmente la solución del P.V.I. es

$y(x) = \frac{5}{16}\,e^{2x} + \frac{5}{144}\,e^{-2x} + \left(-\frac{1}{3}\,x - \frac{2}{9} \right) e^x - \frac{1}{8}\,cos(2x)$ ❑

(20 puntos)

3) Al apagar un motor su temperatura es de $98^\circ\,C$ y el medio en que se encuentra se conserva a $21^\circ C.$ Si después de 10 minutos el motor se ha enfriado a $88^\circ C$, encuentre:

$i)$ la temperatura del motor como función del tiempo.

$ii)$ El instante en el cual su temperatura es de $35^\circ C$

(Considere 6 decimales en todos sus cálculos parciales, y para el resultado final considere 1 decimal redondeado).

Solución:

$i)$ Tenemos que $\frac{dT}{dt} = k(T_A - T)$

$\frac{dT}{dt} = k(21 - T) \Rightarrow \frac{dT}{21-T} = k\,dt \Rightarrow$ Multiplico por (-1) $\frac{dT}{T-21T} = -\,k\,dt \Rightarrow$

$\int \frac{dT}{T-21} = -\,k \int dt \Rightarrow ln(T-21) = -\,k\,t + c \Rightarrow T - 21 = M\,e^{-k\,t}$, con $M = e^c > 0$

$T - 21 = M\,e^{-k\,t} \Rightarrow T(t) = 21 + M\,e^{-k\,t}$

Sabemos que $T(0) = 98$ y $T(10) = 88$

$T(0) = 98 \Rightarrow 21 + M = 98 \Rightarrow M = 98 - 21 = 77 > 0$

$T(10) = 88 \Rightarrow 21 + 77\;e^{-10\,k} = 88 \Rightarrow 77\,e^{-10k} = 67 \Rightarrow e^{-10k} = \frac{67}{77}$

$\Rightarrow\; -10\,k = ln(\frac{67}{77}) \Rightarrow k = -\,\frac{1}{10}\,ln(\frac{67}{77}) \approx 0.013911$

$T(t) = 21 + 77\,e^{-0.013911\,t}$

$ii)\,T(t) = 35 \Rightarrow 21 + 77\,e^{-0.013911\,t} = 35 \Rightarrow 77\,e^{-0.013911\,t} = 14$

$\Rightarrow\; e^{-0.013911\,t} = \frac{14}{77} \Rightarrow\; -0.013911\,t = ln(\frac{14}{77})$

$\Rightarrow t \approx -\,\frac{1}{0.013911} ln(\frac{14}{77}) = 122.5$ minutos

(20 puntos)