UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 18/10/23

1) Determine si la siguiente integral es convergente o no, y en caso de serlo calcule su resultado.

$$\int_0^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}}$$

(15 puntos)

<u>Solución:</u>
La integral dada es impropia, pues para $z = 1 \in [0,4]$ la integranda es discontinua.

Por lo anterior, se tiene que $\displaystyle\int_0^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \lim_{a\to 1^-} \int_0^a \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} + \lim_{a\to 1^+} \int_a^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}}$

Obtengamos el resultado de la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}}$

Sea $w^3 = z - 1$
$w^3 = z - 1 \Rightarrow 3\,w^2\,dw = dz$
$w^3 = z - 1 \Rightarrow w = \sqrt[3]{z-1}$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \int \frac{3\,w^2\,dw}{w} = 3\int w\,dw = \frac{3}{2}\,w^2 = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(z-1)^2}$$

Ahora usemos el resultado recién obtenido para calcular $\displaystyle\int_0^a \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}}$ y $\displaystyle\int_a^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}}$

$$\int_0^a \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(z-1)^2}\Big|_0^a = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(a-1)^2} - \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(0-1)^2} =$$
$$\frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(a-1)^2} - \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(-1)^2} = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(a-1)^2} - \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{1} = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(a-1)^2} - \frac{3}{2}$$

$$\int_a^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(z-1)^2}\Big|_a^4 = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(4-1)^2} - \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(a-1)^2} =$$
$$\frac{3}{2}\,\sqrt[3]{3^2} - \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(a-1)^2} = \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{9} - \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{(a-1)^2}$$

Calculemos los límites

$$\lim_{a\to 1^-} \int_0^a \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \lim_{a\to 1^-} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(a-1)^2} - \frac{3}{2} \right] = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{a\to 1^+} \int_a^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \lim_{a\to 1^-} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{9} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a-1)^2} \right] = \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} - 0 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$$

Después de todo este desarrollo podemos decir que la integral es convergente y además $\displaystyle\int_0^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \lim_{a\to 1^-} \int_0^a \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} + \lim_{a\to 1^+} \int_a^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$ ❏

2) Obtenga $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(x)\,dx,$ usando $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

(15 puntos)

<u>Solución:</u>

Sea $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$, luego $sen(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

Además, si $x = 0,$ entonces $t = tg(0) = 0$ y si $x = \frac{\pi}{4},$ entonces $t = tg\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

Por otro lado, $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$, por lo que la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(x)\,dx$ es igual a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos(x)}\,dx$

Se tiene que $\displaystyle\int \frac{1}{cos(x)}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt$

Usemos ahora la descomposición en suma de fracciones parciales.

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow 1 = A(1+t) + B(1-t)$$

$t = 1:\ \ 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$t = -1:\ 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} \Rightarrow \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt \Rightarrow$$
$$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}ln(1-t) + \frac{1}{2}ln(1+t)$$

Así, $\displaystyle\int \frac{1}{cos(x)}\,dx = 2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = ln(1+t) - ln(1-t)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos(x)}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \Big[ln(1+t) - ln(1-t)\Big]_0^{\sqrt{2}-1} =$$
$$ln(\sqrt{2}) - ln(1-\sqrt{2}+1) - ln(1) + ln(1) = ln(\sqrt{2}) - ln(2-\sqrt{2})$$

Finalmente, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(x)\,dx = ln(\sqrt{2}) - ln(2-\sqrt{2})$ ❏

3) Obtenga y grafique el área de la región acotada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x^2$, $x = -2$ y $x = 2$

(15 puntos)

Solución:

Tenemos que $y = x^2 + 1$ es una parábola, cuyo vértice $V_1 = (0, 1)$, pues

$y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2 \Rightarrow V_1 = (0, 1)$

Por otro lado, $y = 3 - x^2$ también es una parábola cuyo vértice es $V_2 = (0, 3)$, pues

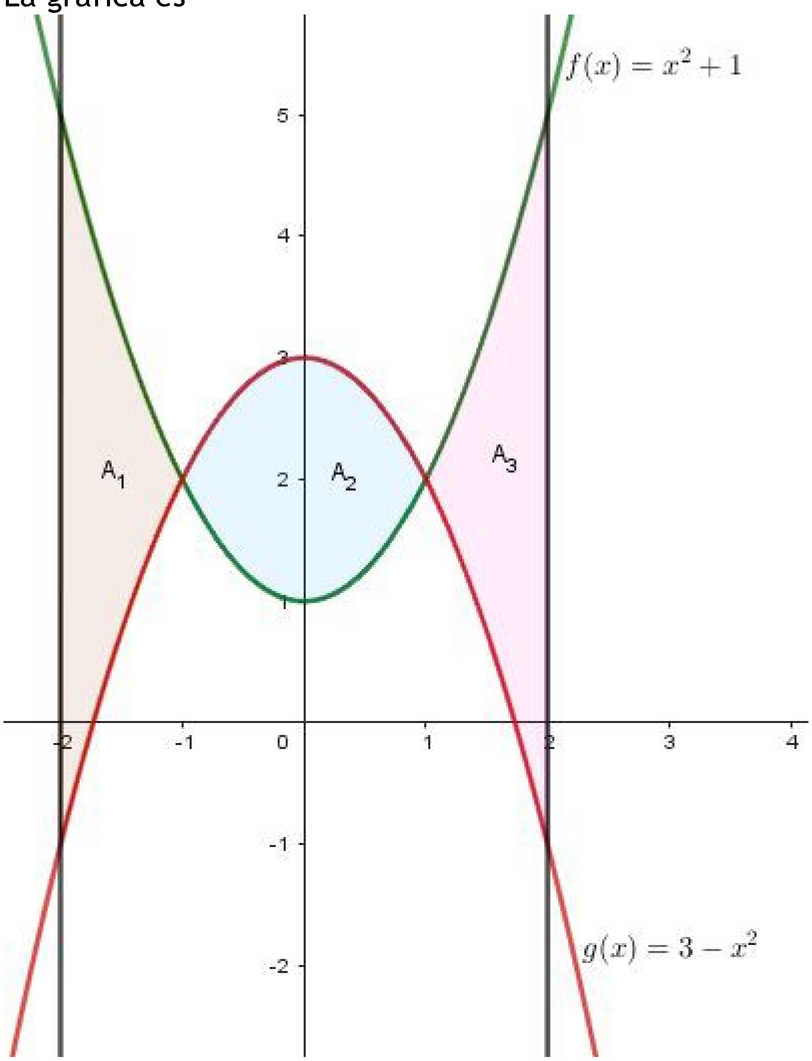
$y = 3 - x^2 \Rightarrow y - 3 = -x^2 \Rightarrow V_2 = (0, 3)$

Obtengamos puntos de intersección P_1 y P_2 entre estas parábolas

$$x^2 + 1 = 3 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Luego $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (-1, 0)$

La gráfica es



Calculemos A_1

$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 1 - (3 - x^2))\, dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 1 - 3 + x^2)\, dx =$

$\int_{-2}^{-1} (2x^2 - 2)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x\right]_{-2}^{-1} = -\frac{2}{3} + 2 + \frac{16}{3} - 4 = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$

Calculemos A_2

$A_2 = \int_{-1}^{1} (3 - x^2 - (x^2 + 1))\, dx = \int_{-1}^{1} (3 - x^2 - x^2 - 1)\ dx =$

$\int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\, dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Calculemos A_3

$A_3 = \int_{1}^{2} (x^2 + 1 - (3 - x^2))\, dx = \int_{1}^{2} (x^2 + 1 - 3 + x^2)\, dx =$

$\int_{1}^{2} (2x^2 - 2)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x\right]_{1}^{2} = \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$

Finalmente, el área acotada por las curvas dadas es

$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 8$ ❑

4) Un recipiente de matequilla, inicialmente a $25°C$, se coloca en el refrigerador, donde la temperatura es de $0°C$. Se sabe que la temperatura de la mantequilla se redujo a $15°C$ después de 20 minutos. ¿ Cuándo estará a $5°C$?

(15 puntos)

Solución:

Sea T la temperatura, en grados celsius, de la mantequilla y sea t el tiempo, en minutos, que transcurre desde que la mantequilla se coloca en el refrigerador. Además sea T_A la temperatura del ambiente, es decir, la temperatura interior del refrigerador.

Tenemos que :

$T(0) = 25$

$T(20) = 15$

$T_A = 0$

$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A) \Rightarrow \frac{dT}{T-0} = k\, dt \Rightarrow \frac{dT}{T} = k\, dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T} = k \int dt \Rightarrow$

$ln(T) = k\, t + c \Rightarrow T(t) = c_1\, e^{kt}$

$T(0) = 25 \Rightarrow c_1 = 25$

$T(20) = 15 \Rightarrow 25\, e^{20k} = 15 \Rightarrow e^{20k} = \frac{3}{5} \Rightarrow 20k = ln\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow k = \frac{ln\left(\frac{3}{5}\right)}{20} \approx -0.0255$

$T(t) = 5 \Rightarrow 25\, e^{k\, t} = 5 \Rightarrow e^{k\, t} = \frac{1}{5} \Rightarrow k\, t = ln\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow t = \frac{ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{ln\left(\frac{3}{5}\right)}{20}} \approx 63$ minutos

Finalmente, la matequilla estará a $5°C$ después de aproximadamente 63 minutos ❑