UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 26/10/22

1) Resuelva el P.V.I. siguiente:
$\frac{dA}{dt} = 1 - \frac{t^2}{1+t^3}$, $A(0) = 1$

(15 puntos)

Solución:

$\frac{dA}{dt} = 1 - \frac{t^2}{1+t^3} \Rightarrow dA = 1 - \frac{t^2}{1+t^3}\, dt \Rightarrow \int dA = \int \left(1 - \frac{t^2}{1+t^3}\right) dt \Rightarrow$

$A(t) = \int dt - \int \frac{t^2}{1+t^3}\, dt \Rightarrow A(t) = t - \int \frac{t^2}{1+t^3}\, dt$

Para calcular la integral $\int \frac{t^2}{1+t^3}\, dt$, se considera la sustitución simple $z = 1 + t^3$

$z = 1 + t^3 \Rightarrow dz = 3\,t^2\, dt \Rightarrow t^2\, dt = \frac{1}{3}\, dz$

$\int \frac{t^2}{1+t^3}\, dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{3}\, ln(z) = \frac{1}{3}\, ln(1 + t^3)$

Reemplazando en $A(t) = t - \int \frac{t^2}{1+t^3}\, dt$, se tiene

$A(t) = t - \int \frac{t^2}{1+t^3}\, dt = t - \frac{1}{3}\, ln(1 + t^3) + c$

Se considera ahora la condición inicial $A(0) = 1$

$A(0) = 1 \Rightarrow 0 - \frac{1}{3}\, ln(1 + 0) + c = 1 \Rightarrow c = 1$

Finalmente, la solución del P.V.I. es $A(t) = t - \frac{1}{3}\, ln(1 + t^3) + 1$ ❑

2) Resuelva la EDO $K' = \frac{K-r}{r}$

(15 puntos)

Solución:

$K' = \frac{K-r}{r} \Rightarrow \frac{dK}{dr} = \frac{K}{r} - 1$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos.

$v = \frac{K}{r} \Rightarrow v\,r = K \Rightarrow \frac{dv}{dr}\, r + v = \frac{dK}{dr}$

$\frac{dK}{dr} = \frac{K}{r} - 1 \Rightarrow \frac{dv}{dr}\, r + v = v - 1 \Rightarrow \frac{dv}{dr}\, r = -1 \Rightarrow dv = -\frac{dr}{r} \Rightarrow$

$\int dv = -\int \frac{dr}{r} \Rightarrow v(r) = -ln(r) + c$

$K = v\,r \Rightarrow K(r) = -r\,ln(r) + r\,c$ ❑

3) Resuelva $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt$

(15 puntos)

<u>Solución:</u>

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt = \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt + \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt$$

Se resuelve la integral indefinida $\int \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt$

Sea $z^2 = t$

$z^2 = t \Rightarrow z = \sqrt{t}$

$z^2 = t \Rightarrow 1+t = 1+z^2$

$z^2 = t \Rightarrow 2\,z\,dz = dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt = \int \frac{1}{z\,(1+z^2)}\, 2\,z\,dz = 2\int \frac{1}{1+z^2}\, dz = 2\,Arctg(z) = 2\,Arctg(\sqrt{x})$$

Ahora, $\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt = 2\,Arctg(\sqrt{t})\Big|_b^1 = 2\,Arctg(1) - 2\,Arctg(\sqrt{b})$

$$\lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt = \lim_{b\to 0^+} \left[2\,Arctg(1) - 2\,Arctg(\sqrt{b})\right] = 2\,\tfrac{\pi}{4} - 2\,(0) = \tfrac{\pi}{2}$$

Además, $\int_1^b \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt = 2\,Arctg(\sqrt{t})\Big|_1^b = 2\,Arctg(\sqrt{b}) - 2\,Arctg(1)$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[2\,Arctg(\sqrt{b}) - 2\,Arctg(1)\right] = 2\,\tfrac{\pi}{2} - 2\,\tfrac{\pi}{4} = \pi - \tfrac{\pi}{2}$$

Finalmente,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt = \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt + \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\, dt =$$

$\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = \pi$ ❑

4) Calcule el área acotada por $3x^2 - y = 3$ y $x + 2y = 1$

(15 puntos)

<u>Solución:</u>

Se calculan los puntos de intersección entre las curvas dadas

$3x^2 - y = 3 \Rightarrow y = 3x^2 - 3$

$x + 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1-x}{2}$

Se igualan las y:

$$3x^2 - 3 = \frac{1-x}{2} \Rightarrow 6x^2 - 6 = 1 - x \Rightarrow 6x^2 + x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{12} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{12} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 13}{12} \Rightarrow x = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+13}{12} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-1-13}{12} = -\dfrac{14}{12} = -\dfrac{7}{6} \approx -1.17 \end{cases}$$

Se obtienen puntos de intersección con los ejes:

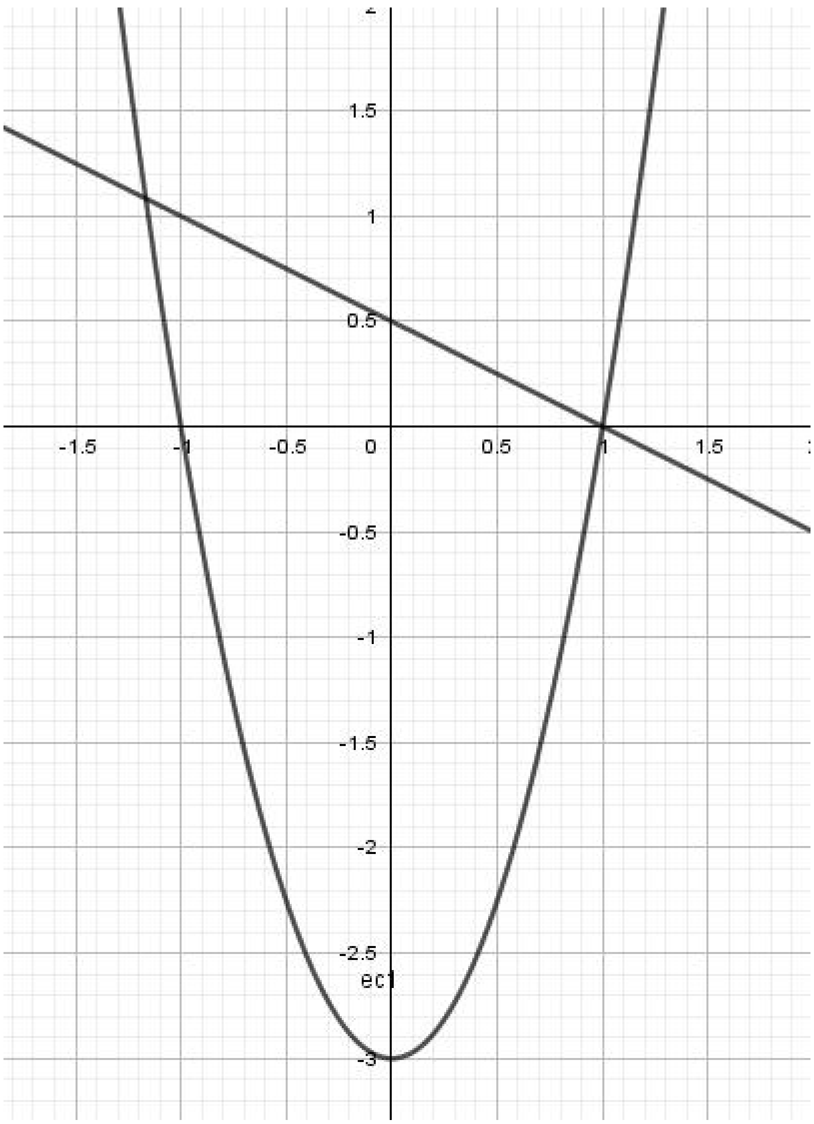
Para $3x^2 - y = 3$

Eje $x:\ y = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ó $x = -1$

Eje $y:\ x = 0 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$

Para $x + 2y = 1$

Eje $x:\ y=0 \Rightarrow x=1$
Eje $y:\ x=0 \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$
Se necesita saber cuál función está arriba y cuál está abajo en el intervalo $[-\frac{7}{6},1]$; para ello, se bosqueja la gráfica de la parábola $y=3-3x^2$ y de la recta $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$



Se observa que la recta está sobre la parábola en el intervalo considerado.

$$A=\int_{-\frac{7}{6}}^{1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x-(3x^2-3)\right)dx=\int_{-\frac{7}{6}}^{1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x-3x^2+3\right)dx=$$

$$\int_{-\frac{7}{6}}^{1}\left(-3x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)dx=-\int_{-\frac{7}{6}}^{1}3x^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{-\frac{7}{6}}^{1}x\,dx+\frac{7}{2}\int_{-\frac{7}{6}}^{1}\,dx=$$

$$-x^3\Big|_{-\frac{7}{6}}^{1}-\frac{1}{4}x^2\Big|_{-\frac{7}{6}}^{1}+\frac{7}{2}x\Big|_{-\frac{7}{6}}^{1}=-1-\frac{343}{216}-\frac{1}{4}+\frac{49}{144}+\frac{7}{2}+\frac{49}{12}=\frac{2197}{432}\approx 5.09\ \square$$