

**PAUTA CERTAMEN N° 2 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS

FECHA : Lu 01/06/26

1) Resuelva el P.V.I. $y' = x - \cos(x) + \ln(x)$, con $y(2) = 4$

(10 puntos)

Solución:

$$y' = x - \cos(x) + \ln(x) \Rightarrow \int y' dx = \int x dx - \int \cos(x) dx + \int \ln(x) dx \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 - \sin(x) + x \ln(x) - x + c$$

$$y(2) = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} 4 - \sin(2) + 2 \ln(2) - 2 + c = 4 \Rightarrow$$

$$2 - \sin(2) + 2 \ln(2) - 2 + c = 4 \Rightarrow c = 4 + \sin(2) - 2 \ln(2)$$

$$\text{Finalmente, } y(x) = \frac{1}{2} x^2 - \sin(x) + x \ln(x) - x + 4 + \sin(2) - 2 \ln(2) \quad \square$$

2) Un recipiente de matequilla, inicialmente a $25^\circ C$, se coloca en el refrigerador, donde la temperatura es de $0^\circ C$. Se sabe que la temperatura de la mantequilla se redujo a $15^\circ C$ después de 20 minutos. ¿Cuándo estará a $5^\circ C$?

(15 puntos)

Solución:

Notamos que este es un fenómeno de enfriamiento de Newton. Luego

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{amb}) \Rightarrow \frac{dT}{T - T_{amb}} = k dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T - T_{amb}} = k \int dt \Rightarrow$$
$$\ln|T - T_{amb}| = kt + c \Rightarrow T - T_{amb} = \pm e^{kt} e^c \Rightarrow T(t) = \pm e^{kt} e^c + T_{amb}$$

Según el enunciado, se tiene que $T(0) = 25$, $T_{amb} = 0$, $T(20) = 15$

$$T(0) = 25 \Rightarrow \pm e^0 e^c = 25 \Rightarrow + e^c = 25 \text{ (Consideramos el signo positivo).}$$

$$\text{Luego : } T(t) = 25 e^{kt}$$

$$T(20) = 15 \Rightarrow 25 e^{20k} = 15 \Rightarrow e^{20k} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow 20k = \ln\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{20}$$

Nos preguntan cuándo estará a 5 grados celsius, es decir,

$$T(t) = 5 \Rightarrow 25 e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{20} t} = 5 \Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{20} t = \ln\left(\frac{5}{25}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{20}} \approx \frac{-1.609437912}{-0.025541281}$$

$$\approx 63.01 \text{ minutos} \quad \square$$

3) Resuelva $\int_0^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}}$

(15 puntos)

Solución:

Notamos que es una integral impropia, pues la integranda se indetermina en $z = 1$

$$\int_0^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}}$$

Obtengamos el resultado de la integral indefinida $\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}}$. Hagamos

$x^3 = z - 1$, es decir, $3x^2 dx = dz$ y además $x = \sqrt[3]{z-1}$

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \int \frac{3x^2}{x} dx = 3 \int x dx = \frac{3}{2} x^2 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(z-1)^2}$$

Calculemos las integrales definidas

$$\int_0^t \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(z-1)^2} \Big|_0^t = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(t-1)^2} - \frac{3}{2}$$

$$\int_t^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(z-1)^2} \Big|_t^4 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{3^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(t-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^4 \frac{dz}{\sqrt[3]{z-1}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(t-1)^2} - \frac{3}{2} \right] + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{3^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(t-1)^2} \right] = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{3^2} = \\ &= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - 1) \quad \square \end{aligned}$$

4) Resuelva la EDO : $y' + xy = x^3 \sqrt{y}$

(10 puntos)

Solución:

Esta es una edo de Bernoulli con $n = \frac{1}{2}$, $p(x) = x$, $q(x) = x^3$

Si hacemos $v = y^{1-n} = y^{1-1/2} = y^{1/2}$, se obtiene la edo lineal en v

$$v' + \frac{1}{2} x v = \frac{1}{2} x^3$$

Resolvamos la edo lineal usando la fórmula correspondiente

$$\mu = e^{\int p^*(x) dx} = e^{\int \frac{1}{2} x dx} = e^{\frac{1}{4} x^2}$$

$$\int \mu q^*(x) dx = \frac{1}{2} \int e^{\frac{1}{4} x^2} x^3 dx = \frac{1}{2} \int e^{\frac{1}{4} x^2} x^2 x dx$$

Si hacemos $B = \frac{1}{4} x^2$, se tiene $dB = \frac{1}{2} x dx$, es decir, $x dx = 2 dB$

$$\frac{1}{2} \int e^B 4 B^2 dB = 4 \int e^B B dB$$

Usando integración por partes

$$p' = e^B \Rightarrow p = e^B$$

$$q = B \Rightarrow q' = 1$$

$$4 \int e^B B dB = 4B e^B - 4 \int e^B = 4B e^B - 4e^B$$

$$\frac{1}{2} \int e^{\frac{1}{4}x^2} x^2 x dx = x^2 e^{\frac{1}{4}x^2} - 4e^{\frac{1}{4}x^2} = (x^2 - 4) e^{\frac{1}{4}x^2}$$

Luego

$$v(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2} \left[(x^2 - 4) e^{\frac{1}{4}x^2} + c \right] = x^2 - 4 + c e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

Notemos que : $v = \sqrt{y} \Rightarrow y = v^2$

Finalmente, $y(x) = (x^2 - 4 + c e^{-\frac{1}{4}x^2})^2$ $\square$

5) Un lago contiene $10^6 m^3$ de agua. Un río contaminado fluye hacia el lago a $2000 m^3/\text{día}$ con $0.05 kg/m^3$ de un tóxico. El lago desagua al mismo ritmo. Obtenga la cantidad de contaminantes $Q(t)$ en el lago si $Q(0) = 0$.

(10 puntos)

Solución:

Este es un problema de mezclas.

$$V_0 = 10^6, q_E = 2000, c_E = 0.05, q_S = 2000, c_S = \frac{Q(t)}{V_0} = \frac{Q(t)}{10^6}, Q(0) = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = q_E c_E - q_S c_S = 2000 \cdot 0.05 - 2000 \frac{Q(t)}{10^6} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 100 - 2 \times 10^{-3} Q \Rightarrow$$

$$Q' + 2 \times 10^{-3} Q = 100$$

Esta es una edo lineal con $p(t) = 2 \times 10^{-3}$, $q(t) = 100$

$$\mu = e^{\int 2 \times 10^{-3} dt} = e^{2 \times 10^{-3} t}$$

$$\int \mu q(t) dt = \int e^{2 \times 10^{-3} t} 100 dt = 100 \int e^{2 \times 10^{-3} t} dt = \frac{100}{2 \times 10^{-3}} e^{2 \times 10^{-3} t} = 50000 e^{2 \times 10^{-3} t}$$

$$Q(t) = e^{-2 \times 10^{-3} t} \left[50000 e^{2 \times 10^{-3} t} + c \right] = 50000 + c e^{-2 \times 10^{-3} t}$$

Ahora, como $Q(0) = 0$, se tiene que $50000 + c = 0$, es decir, $c = -50000$

Finalmente, $Q(t) = 50000 - 50000 e^{-2 \times 10^{-3} t}$ $\square$