UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
***Juan Carlos Sandoval Avendaño***

# PAUTA CERTAMEN N° 2 CÁLCULO AVANZADO
## INGENIERÍA AMBIENTAL

**NOMBRE :**____________________________________________________
**TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS** **FECHA : Mi 25/06/25**

1) Resuelva la ecuación diferencial ordinaria $3\,y' + xy = 0$

**(15 puntos)**

**Solución:**

$3\,y' + xy = 0 \Rightarrow 3\,\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Rightarrow 3\,\frac{dy}{dx} = -\,xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\,\frac{1}{3}x\,dx \Rightarrow$

$\int \frac{dy}{y} = -\,\frac{1}{3}\int x\,dx \Rightarrow ln(y) = -\,\frac{1}{6}x^2 + c \Rightarrow y(x) = e^c\,e^{-\frac{1}{6}x^2} \Rightarrow y(x) = k\,e^{-\frac{1}{6}x^2}$,
con $k = e^c > 0$ ❑

2) Determine si la integral $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ es convergente o no, y en caso de serlo calcule su resultado

**(15 puntos)**

**Solución:**

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Resolvamos la integral indefinida $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Sea $z^2 = x$
$z^2 = x \Rightarrow 2z\,dz = dx$
$z^2 = x \Rightarrow z = \sqrt{x}$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{e^{-z}}{z}\,2z\,dz = 2\int e^{-z}\,dz = -2\,e^{-z} = -2\,e^{-\sqrt{x}}$$

Calculemos $\int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\,e^{-\sqrt{x}}\Big|_a^1 = -2\,e^{-1} + 2\,e^{-\sqrt{a}}$$

Calculemos $\lim\limits_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} (-2\,e^{-1} + 2\,e^{-\sqrt{a}}) = -2\,e^{-1} + 2$$

Calculemos ahora $\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\,e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^t = -2\,e^{-\sqrt{t}} + 2\,e^{-1}$$

Ahora, calculemos $\lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to\infty} [-2\,e^{-\sqrt{t}} + 2\,e^{-1}] = 0 + 2\,e^{-1} = 2\,e^{-1}$$

Luego

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\,e^{-1} + 2 + 2\,e^{-1} = 2$$

Finalmente, la integral dada es convergente y además $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2$ ❑

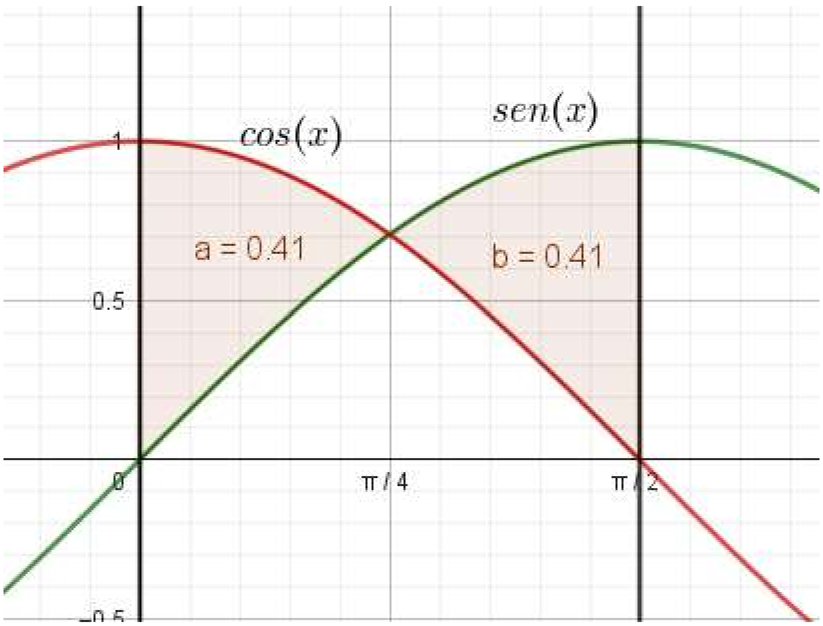
3) Obtenga el área de la región acotada por las curvas $y = sen(x)$, $y = cos(x)$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

**(15 puntos)**

**Solución:**

En primer lugar, obtengamos los puntos de intersección entre las curvas, entre $0$ y $\frac{\pi}{2}$

$sen(x) = cos(x) \Rightarrow tg(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$




Observamos que

$A = A_1 + A_2$

donde $A_1$ es el área de la región acotada por $cos(x)$ y $sen(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ y $A_2$ es el área de la región acotada por $sen(x)$ y $cos(x)$ en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

Luego

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos(x) - sen(x))\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen(x) dx =$$

$$sen(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (sen(x) - cos(x))\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) dx =$$

$$-\,cos(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - sen(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \,-\,0 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$$

Finalmente, $A = A_1 + A_2 = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\,\sqrt{2} - 2 \approx 0.83$ $\square$

4) Resuelva la integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\,dx$

**(15 puntos)**

**Solución:**

Sea $z^6 = x$

$z^6 = x \Rightarrow 6z^5\,dz = dx$

$z^6 = x \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{z^6} = z^{\frac{6}{2}} = z^3$

$z^6 = x \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{z^6} = z^{\frac{6}{3}} = z^2$

$z^6 = x \Rightarrow z = \sqrt[6]{x}$

Luego,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{z^3}{z^3 - z^2}\,6\,z^5\,dz = \int \frac{z^3}{z^2(z-1)}\,6\,z^5\,dz =$$

$$6\int \frac{z^6}{z-1}\;dz$$

$$z^6 : z - 1 = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

$^{(-)}z^6 \,\_\, ^{(+)}z^5$

$---------$

$z^5$

$^{(-)}z^5 \,\_\, ^{(+)}z^4$

$--------$

$z^4$

$^{(-)}\; z^4 \,\_\, ^{(+)}z^3$

$---------$

$z^3$

$^{(-)}\; z^3 \,\_\, ^{(+)}z^2$

$---------$

$^{(-)}\; z^2 \,\_\, ^{(+)}z$

$----------$

$z$

$^{(-)}z \,\_\, ^{(+)}1$

$-------$

$1$

Tenemos que : $\frac{z^6}{z-1} = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z-1}$

$$6\int \frac{z^6}{z-1}\ dz = 6\int \left(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z-1}\right)\ dz =$$

$$6\int z^5\, dz + 6\int z^4\, dz + 6\int z^3\, dz + 6\int z^2\, dz + 6\int z\, dz + 6\int dz + 6\int \frac{1}{z-1}\ dz =$$

$$\frac{6}{6}z^6 + \frac{6}{5}z^5 + \frac{6}{4}z^4 + \frac{6}{3}z^3 + \frac{6}{2}z^2 + 6z + 6\, ln|\, z-1\,| + c =$$

$$z^6 + \frac{6}{5}z^5 + \frac{3}{2}z^4 + 2\, z^3 + 3\, z^2 + 6z + 6\, ln|\, z-1\,| + c$$

Finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx =$$

$$x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\,\sqrt{x} + 3\,\sqrt[3]{x} + 6\,\sqrt[6]{x} + 6\, ln|\,\sqrt[6]{x} - 1\,| + c \ \square$$