UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Mi 29/05/24**

1) Resuelva la E.D.O. $y' = \frac{xy+y^2}{x^2}$

(15 puntos)

Solución:

$y' = \frac{xy+y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2}{x^2} \Rightarrow x^2dy = (xy+y^2)dx \Rightarrow (xy+y^2)dx - x^2dy = 0$

Observamos que $M(x,y) = xy + y^2$ es de grado 2 y $N(x,y) = -x^2$ también lo es, por lo que estamos frente a una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos.

Sea $v = \frac{y}{x}$, es decir $v\,x = y$

$v\,x = y \Rightarrow \frac{dv}{dx}\,x + v = \frac{dy}{dx}$

Reemplazando en $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2}{x^2}$ se tiene que

$\frac{dv}{dx}\,x + v = \frac{x(vx)+(vx)^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}\,x + v = \frac{x^2v+x^2v^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}\,x + v = \frac{x^2(v+v^2)}{x^2} \Rightarrow$
$\frac{dv}{dx}\,x + v = v + v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx}$
$x = v^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int v^{-2}dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -v^{-1} = ln|\,x\,| + c \Rightarrow$
$v^{-1} = -(ln|\,x\,| + c) \Rightarrow \frac{1}{v} = -(ln|\,x\,| + c) \Rightarrow v = -\frac{1}{ln|\,x\,|+c} \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{ln|\,x\,|+c}$
$\Rightarrow y = -\frac{x}{ln|\,x\,|+c}$ ❑

2) Resuelva la integral $\int \frac{t}{t^2-1}dt$, usando sustitución, y fracciones parciales. Compare sus resultados.

(15 puntos)

Solución:

Usemos en primer lugar la sustitución simple $V = t^2 - 1$

$V = t^2 - 1 \Rightarrow dV = 2\,t\,dt \Rightarrow d\,dt = \frac{1}{2}\,dV$

$\int \frac{t}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dV}{V} = \frac{1}{2}ln|\,V\,| + c_1 = \frac{1}{2}ln|\,t^2-1\,| + c_1$

Desarrollemos el mismo ejercicio usando fracciones parciales

$\frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow t = A(t+1) + B(t-1)$

$t = 1:\; 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$t = -1:\; -1 = -2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

Luego $\int \frac{t}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{1}{2}ln|\,t-1\,| + \frac{1}{2}ln|\,t+1\,| + c_2 =$
$\frac{1}{2}ln|\,(t-1)(t+1)\,| + c_2 = \frac{1}{2}ln|\,t^2-1\,| + c_2$

Observamos que los resultados son iguales, excepto por una constante ❑

3) Obtenga el valor exacto de $\int_1^2 \frac{x^5}{3x^2-1}dx$

(15 puntos)

<u>Solución:</u>

Trabajemos la integral impropia $\int \frac{x^5}{3x^2-1}dx$

$\int \frac{x^5}{3x^2-1}dx = \int \frac{x^4\,x}{3x^2-1}dx$

Sea $P = 3x^2 - 1$

$P = 3x^2 - 1 \Rightarrow dP = 6\,x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{6}\,dP$

$P = 3x^2 - 1 \Rightarrow 3x^2 = P + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}(P+1) \Rightarrow x^4 = \frac{1}{9}(P+1)^2$

Luego $\int \frac{x^5}{3x^2-1}dx = \frac{1}{9}\frac{1}{6}\int \frac{(P+1)^2}{P}dP = \frac{1}{54}\int \frac{P^2+2P+1}{P}dP =$
$\frac{1}{54}\int \left(P + 2 + \frac{1}{P}\right)dP = \frac{1}{54}\int P\,dP + 2\frac{1}{54}\int dP + \frac{1}{54}\int \frac{1}{P}\,dP =$
$\frac{1}{54}\frac{1}{2}P^2 + \frac{2}{54}P + \frac{1}{54}ln|\,P\,| = \frac{1}{108}P^2 + \frac{1}{27}P + \frac{1}{54}ln|\,P\,| =$
$\frac{1}{108}(3x^2-1)^2 + \frac{1}{27}(3x^2-1) + \frac{1}{54}ln|\,3x^2-1\,|$

De lo anterior, se tiene que

$\int_1^2 \frac{x^5}{3x^2-1}dx = \left[\frac{1}{108}(3x^2-1)^2 + \frac{1}{27}(3x^2-1) + \frac{1}{54}ln|\,3x^2-1\,|\right]_1^2 =$

$\frac{1}{108}\,11^2 + \frac{11}{27} + \frac{1}{54}ln|\,11\,| - \frac{1}{108}2^2 - \frac{2}{27} - \frac{1}{54}ln|\,2\,| =$

$\frac{121}{108} + \frac{11}{27} + \frac{1}{54}ln|\,11\,| - \frac{4}{108} - \frac{2}{27} - \frac{1}{54}ln|\,2\,| = \frac{17}{12} + \frac{1}{54}ln\left(\frac{11}{2}\right)$ ❑

4) Obtenga el área bajo la curva $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ en el intervalo $[2,5]$

(15 puntos)

Solución:

El área A bajo la curva $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ en el intervalo $[2,5]$ está dada por la integral

$$A = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$$

Obtengamos $\int \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \int (x-2)^{-1/2}\,dx = 2\,(x-2)^{1/2} = 2\sqrt{x-2}$$

Luego $\int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = 2\sqrt{x-2}\,\Big|_t^5 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2}$

Calculemos el límite

$$\lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{t\to 2^+} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3}$$

Finalmente el área solicitada es $A = 2\sqrt{3}$ ❑