UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Mi 08/06/22

1) Resuelva la EDO $\frac{dP}{dt} = P\,(100-P),\ P(0)=5$

Solución:

$\frac{dP}{dt} = P\,(100-P) \Rightarrow \frac{dP}{P\,(100-P)} = dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P\,(100-P)} = \int dt \Rightarrow$
$\int \frac{dP}{P\,(100-P)} = t$

Para calcular la integral $\int \frac{dP}{P\,(100-P)}$, usaremos descomposición en suma de fracciones parciales.

$\frac{1}{P(100-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{100-P} \Rightarrow 1 \equiv A(100-P) + B\,P$

$P = 0:\ 1 = 100\,A \Rightarrow A = \frac{1}{100}$
$P = 100:\ 1 = 100\,B \Rightarrow B = \frac{1}{100}$

$\frac{1}{P(100-P)} = \frac{1}{100}\frac{1}{P} + \frac{1}{100}\frac{1}{100-P} \Rightarrow \int \frac{dP}{P\,(100-P)} = \frac{1}{100}\int \frac{dP}{P} + \frac{1}{100}\int \frac{dP}{100-P}$
$\Rightarrow \int \frac{dP}{P\,(100-P)} = \frac{1}{100} ln(P) - \frac{1}{100} ln(100-P) \Rightarrow$
$\int \frac{dP}{P\,(100-P)} = \frac{1}{100}[\,ln(P) - ln(100-P)] \Rightarrow \int \frac{dP}{P\,(100-P)} = \frac{1}{100}\,ln(\frac{P}{100-P})$

$\frac{dP}{dt} = P\,(100-P) \Rightarrow \int \frac{dP}{P\,(100-P)} = t \Rightarrow \frac{1}{100}\,ln(\frac{P}{100-P}) = t + c \Rightarrow$
$ln(\frac{P}{100-P}) = 100\,t + 100\,c \Rightarrow \frac{P}{100-P} = k\,e^{100\,t}$, con $k = e^{100\,c}$

Ahora, $P(0) = 5$, es decir
$ln(\frac{P}{100-P}) = 100\,t + 100\,c \Rightarrow ln(\frac{5}{100-5}) = 100\,(0) + 100\,c \Rightarrow$
$ln(\frac{5}{100-5}) = 100\,(0) + 100\,c \Rightarrow 100\,c = ln(\frac{5}{95}) \Rightarrow 100\,c = ln(\frac{1}{19})$
Luego, $k = e^{100\,c} = e^{ln(\frac{1}{19})} = \frac{1}{19}$
Así

$\frac{P}{100-P} = k\, e^{100\,t} \Rightarrow \frac{P}{100-P} = \frac{1}{19}\, e^{100\,t} \Rightarrow 19\,P = (100-P)\, e^{100\,t} \Rightarrow$
$19P = 100\, e^{100\,t} - e^{100\,t}\, P \Rightarrow 19P + e^{100\,t}\, P = 100\, e^{100\,t} \Rightarrow$
$P(19 + e^{100\,t}) = 100\, e^{100\,t} \Rightarrow P(t) = \frac{100\, e^{100\,t}}{19+e^{100\,t}}$ ❑

(20 puntos)

2) Si es posible, obtenga el resultado de la integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$

Solución:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx + \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$$

Resolvamos la integral indefinida $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$

Sea $z^2 = x$

$z^2 = x \Rightarrow z = \sqrt{x}$

$z^2 = x \Rightarrow 1 + x = 1 + z^2$

$z^2 = x \Rightarrow 2\,z\,dz = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx = \int \frac{1}{z\,(1+z^2)}\, 2\,z\,dz = 2\int \frac{1}{1+z^2}\, dz = 2\,Arctg(z) = 2\,Arctg(\sqrt{x})$$

Ahora $\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx = 2\,Arctg(\sqrt{x})\Big|_t^1 = 2\,Arctg(1) - 2\,Arctg(\sqrt{t})$

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx = \lim_{t\to 0^+} [2\,Arctg(1) - 2\,Arctg(\sqrt{t})] = 2\,\frac{\pi}{4} - 2\,(0) = \frac{\pi}{2}$$

Además $\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx = 2\,Arctg(\sqrt{x})\Big|_1^t = 2\,Arctg(\sqrt{t}) - 2\,Arctg(1)$

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx = \lim_{t\to\infty} [2\,Arctg(\sqrt{t}) - 2\,Arctg(1)] = 2\,\frac{\pi}{2} - 2\,\frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2}$$

Finalmente,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx + \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx =$$

$\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = \pi$ ❑

(20 puntos)

3) Obtenga el área de la región acotada por las curvas $4x + y^2 = 0$ y $y = 2x + 4$

Solución:

Obtengamos los puntos de intersección entre las curvas

$4x + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = -4x$

$y = 2x + 4 \Rightarrow y^2 = (2x+4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$

Luego, $-4x = 4x^2 + 16x + 16 \Rightarrow 4x^2 + 20x + 16 = 0$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{400-256}}{8} = \frac{-20 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{-20 \pm 12}{8} = \begin{cases} \frac{-20+12}{8} = -\frac{8}{8} = -1 \\ \frac{-20-12}{8} = \frac{-32}{8} = -4 \end{cases}$$

$x = -1 \Rightarrow y = 2x + 4 = 2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2$

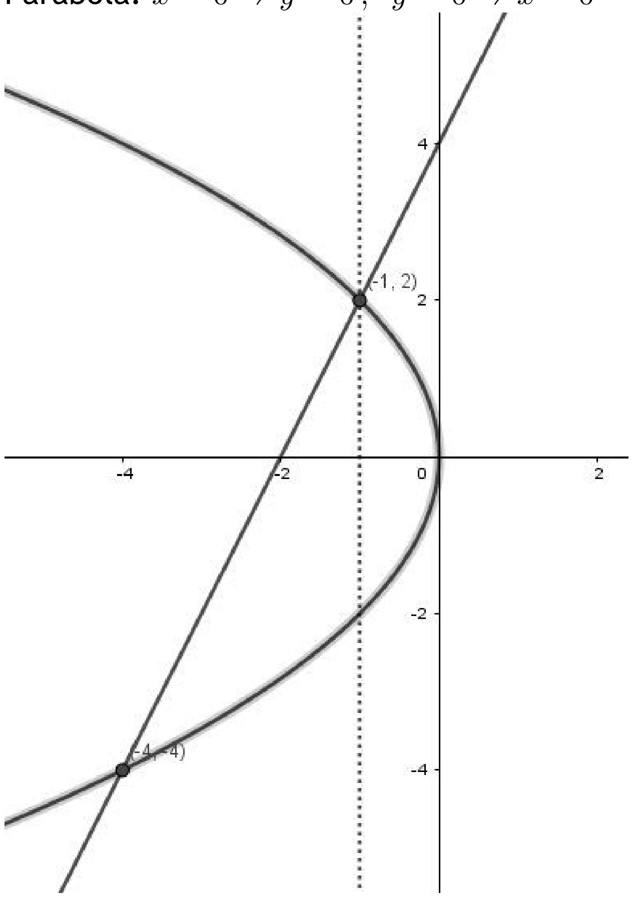
$x = -4 \Rightarrow y = 2x + 4 = 2(-4) + 4 = -8 + 4 = -4$

Los puntos de intersección son $P_1 = (-1, 2)$ y $P_2 = (-4, -4)$

Intersecciones con los ejes

Recta: $x = 0 \Rightarrow y = 4$; $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2$

Parábola: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x = 0$



Entre -4 y -1 la recta está sobre la parábola, en cambio entre -1 y 0, la parte superior de la parábola está sobre la parte inferior de ella misma. Esto significa que el área total de la región acotada por ambas curvas es

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-4}^{-1} [2x + 4 - (-\sqrt{-4x})]\, dx + \int_{-1}^{0} [\sqrt{-4x} - (-\sqrt{-4x})]\, dx$$

$$= \int_{-4}^{-1} [2x + 4 + \sqrt{-4x}]\, dx + \int_{-1}^{0} 2\sqrt{-4x}\ dx$$

Resolvamos la integral $\int \sqrt{-4x}\ dx = \int \sqrt{4}\sqrt{-x}\ dx = 2\int \sqrt{-x}\ dx$

Sea $v = -x$, de donde $dv = -\ dx$, es decir, $dx = -dv$

$$\int \sqrt{-x}\ dx = -2\int \sqrt{v}\ dv = -2\int v^{1/2}\ dv = 2\,\frac{2}{3}\,v^{3/2} = -\frac{4}{3}\,(-x)^{3/2}$$

$$\left[x^2 + 4x - \frac{4}{3}\,(-x)^{3/2}\right]_{-4}^{-1} - \left[\frac{8}{3}\,(-x)^{3/2}\right]_{-1}^{0} =$$

$$1 - 4 - \frac{4}{3} - 16 + 16 + \frac{4}{3}4^{3/2} - 0 + \frac{8}{3} = -3 + \frac{32}{3} + \frac{4}{3} = \frac{36}{3} - 3 = 12 - 3 = 9$$

Finalmente, el área acotada por las curvas es 9 [unidades de área] ❑

(20 puntos)