UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
***Juan Carlos Sandoval Avendaño***

# PAUTA CERTAMEN N° 1 CÁLCULO AVANZADO
## INGENIERÍA AMBIENTAL

**NOMBRE :**________________________________________________
**TIEMPO MÁXIMO : 1HORA 40 MINUTOS** **FECHA : Mi 06/09/23**

1) Resuelva la integral $\int \frac{t+3}{(t^2+6t)^2}\,dt$

**(15 puntos)**

**Solución:**

$P = t^2 + 6t \Rightarrow \; dP = (2t+6)\,dt \Rightarrow dP = 2(t+3)\,dt \Rightarrow \frac{1}{2}dP = (t+3)\,dt$

$$\int \frac{t+3}{(t^2+6t)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{dP}{P^2} = \frac{1}{2}\int P^{-2}dP = -\frac{1}{2}P^{-1} + c = -\frac{1}{2}(t^2+6t)^{-1} + c \;\square$$

2) Muestre que : $\int_0^1 Arcsen(t)\,dt = \frac{\pi}{2} - 1$

**(15 puntos)**

**Solución:**

$p' = 1 \Rightarrow p = t$

$q = Arcsen(t) \Rightarrow q' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\int Arcsen(t)\,dt = t\,Arcsen(t) - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad (*)$$

Ahora si $J = 1 - t^2$, entonces $dJ = -2t\,dt$, es decir $t\,dt = -\frac{1}{2}\,dJ$

$$\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{J}}\,dJ = -\frac{1}{2}\int J^{-1/2}\,dJ = -\frac{1}{2}\,2\,J^{1/2} = -\sqrt{1-t^2}$$

Reemplazando este resultado en $(*)$ se tiene

$$\int Arcsen(t)\,dt = t\,Arcsen(t) + \sqrt{1-t^2}$$

Luego,

$$\int_0^1 Arcsen(t)\,dt = [\,t\,Arcsen(t) + \sqrt{1-t^2}\,]\Big|_0^1 = Arcsen(1) + 0 - 0 - 1$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1 \quad \square$$

3) Resuelva $\int cos^3(q)\,dq$

**(15 puntos)**

**<u>Solución:</u>**

$$\int cos^3(q)\,dq = \int cos^2(q)\; cos(q)\,dq = \int (1 - sen^2(q))\; cos(q)\,dq =$$
$$\int cos(q)\,dq \;-\; \int sen^2(q)\,cos(q)\,dq = sen(q) - \int U^2\,dU = sen(q) - \tfrac{1}{3}U^3 + c =$$
$$sen(q) - \tfrac{1}{3}\,sen^3(q) + c$$

En el desarrollo anterior hemos considerado la sustitución simple $U = sen(q) \Rightarrow dU = cos(q)\,dq$ $\square$

4) Calcule $\int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$

**(15 puntos)**

**<u>Solución:</u>**

$x = a\,tg(\alpha) \Rightarrow dx = a\,sec^2(\alpha)\,d\alpha$

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\,tg^2(\alpha) + a^2} = \sqrt{a^2(tg^2(\alpha)+1)} = |\,a\,|\sqrt{tg^2(\alpha)+1} =$$
$$|\,a\,|\sqrt{sec^2(\alpha)} = |\,a\,|\,sec(\alpha)$$

$$\int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{a^2}{|\,a\,|}\int \frac{a\,sec^2(\alpha)}{sec(\alpha)}\,d\alpha = \frac{a^3}{|\,a\,|}\int sec(\alpha)\,d\alpha =$$
$$\frac{a^3}{|\,a\,|}\,ln(sec(\alpha) + tg(\alpha)) + c$$

Sabemos que $x = a\,tg(\alpha)$, es decir, $tg(\alpha) = \frac{x}{a}$, para $a \neq 0$

Además , $sec(\alpha) = \sqrt{tg^2(\alpha)+1} = \sqrt{(\frac{x}{a})^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|\,a\,|}$

Finalmente, $\int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{a^3}{|\,a\,|}\,ln(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|\,a\,|} + \frac{x}{a}) + c$, para $a \neq 0$ $\square$