UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 1 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Mi 21/09/22**

1) Resuelva la integral $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

(15 puntos)

Solución:

Sea $z^2 = x$

$z^2 = x \Rightarrow z = \sqrt{x}$

$z^2 = x \Rightarrow 2\, z\, dz = dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{e^z}{z}\, 2\, z\, dz = 2\int e^z\, dz = 2\, e^z + c = 2\, e^{\sqrt{x}} + c \quad \square$$

2) Muestre que : $\int_0^{\frac{1}{2}} Arccos(t)\, dt = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

(15 puntos)

Solución:

Sea $J = \int Arccos(t)\, dt = \int 1 \cdot Arccos(t)\, dt$

$p = Arccos(t) \Rightarrow p' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$q' = 1 \Rightarrow q = t$

$J = t\, Arccos(t) + \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

Obtengamos $M = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$, usando la sustitución $P = 1 - t^2$

$P = 1 - t^2 \Rightarrow dP = -2\, t\, dt \Rightarrow t\, dt = -\frac{1}{2}\, dP$

$M = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{P}}\, dP = -\frac{1}{2} \int P^{-1/2}\, dP = -\frac{1}{2}$
$\frac{P^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -P^{1/2} = -\sqrt{P} = -\sqrt{1-t^2}$
Reemplazando M en J
$J = t\, Arccos(t) + \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = t\, Arccos(t) - \sqrt{1-t^2}$
$\int_0^{\frac{1}{2}} Arccos(t)\, dt = \Big[t\, Arccos(t) - \sqrt{1-t^2} \Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, Arccos(\frac{1}{2}) - \sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} + 1 =$
$\frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - \sqrt{1-\frac{1}{4}} + 1 = \frac{\pi}{6} - \sqrt{\frac{3}{4}} + 1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ ❑

3) Resuelva $\int cos^3(q)\, sen^2(q)\, dq$

(15 puntos)

Solución:

$\int cos^3(q)\, sen^2(q)\, dq = \int cos^2(q)\, cos(q)\, sen^2(q)\, dq =$
$\int (1 - sen^2(q))\, cos(q)\, sen^2(q)\, dq = \int sen^2(q)\, cos(q)\; dq - \int sen^4(q)\, cos(q)\; dq$
Si hacemos $N = sen(q)$, entonces $dN = cos(q)\, dq$
$\int cos^3(q)\, sen^2(q)\, dq = \int sen^2(q)\, cos(q)\; dq - \int sen^4(q)\, cos(q)\; dq =$
$\int N^2\, dN - \int N^4\, dN = \frac{N^3}{3} - \frac{N^5}{5} + c = \frac{sen^3(q)}{3} - \frac{sen^5(q)}{5} + c$ ❑

4) Calcule $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$

(15 puntos)

Solución:

$x^2 \quad : \quad x^2 + 1 = 1$
$^{(-)}x^2 + {}^{(-)}1$
$-------$
-1
Lo anterior muestra que : $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$
Así,
$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = x\Big|_0^1 - Arctg(x)\Big|_0^1 = 1 - Arctg(1) =$
$1 - \frac{\pi}{4}$ ❑