UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 1 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 16/04/25

1) Obtenga el valor medio de la función $f(r) = \frac{r^5}{1+r^2}$ en el intervalo $[0,2]$

(15 puntos)

Solución:

El valor medio, vm, de una función f en el intervalo $[a,b]$ se define de la siguiente manera

$vm = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(r)\,dr$

Calculemos $\int f(r)\,dr$

$\int f(r)\,dr = \int \frac{r^5}{1+r^2}\,dr = \int \frac{r^4\,r}{1+r^2}\,dr = \int \frac{r^4}{1+r^2}\;r\,dr$

Sea $t = 1 + r^2$

$t = 1 + r^2 \Rightarrow dt = 2\,r\,dr \Rightarrow \frac{1}{2}\,dt = r\,dr$

$t = 1 + r^2 \Rightarrow r^2 = t - 1 \Rightarrow r^4 = (t-1)^2 \Rightarrow r^4 = t^2 - 2t + 1$

$\int \frac{r^4}{1+r^2}\;r\,dr = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t+1}{t}\;dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t}\;dt - \int \frac{t}{t}\;dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\;dt =$

$\frac{1}{2}\int t\;dt - \int dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\;dt = \frac{1}{4}t^2 - t + \frac{1}{2}\,ln|\,t\,| =$

$\frac{1}{4}(1+r^2)^2 - (1+r^2) + \frac{1}{2}\,ln|\,1+r^2\,|$

De lo anterior, $\int \frac{r^5}{1+r^2}\,dr = \frac{1}{4}(1+r^2)^2 - (1+r^2) + \frac{1}{2}\,ln|\,1+r^2\,|$

Calculemos ahora $\int_0^2 \frac{r^5}{1+r^2}\,dr$

$\int_0^2 \frac{r^5}{1+r^2}\,dr = \left[\frac{1}{4}(1+r^2)^2 - (1+r^2) + \frac{1}{2}\,ln|\,1+r^2\,|\right]_0^2 =$

$\frac{1}{4}(1+4)^2 - (1+4) + \frac{1}{2}\,ln|\,1+4\,| - \frac{1}{4}(1)^2 + 1 - \frac{1}{2}\,ln|\,1\,| =$

$\frac{25}{4} - 5 + \frac{1}{2}\,ln|\,5\,| - \frac{1}{4} + 1 - 0 = 2 + \frac{1}{2}\,ln|\,5\,|$

Finalmente, $vm = \frac{1}{2-0}\,(2 + \frac{1}{2}\,ln|\,5\,|) = \frac{1}{2}\,(2 + \frac{1}{2}\,ln|\,5\,|)$ ❑

2) Resuelva la integral $\int [ln(P)]^2\, dP$

(15 puntos)

Solución:

$I = \int [ln(P)]^2\, dP = \int 1 \cdot [ln(P)]^2\, dP$

$p' = 1 \Rightarrow p = P$

$q = \left[ln(P)\right]^2 \Rightarrow q' = 2\, ln(P)\, \frac{1}{P}$

$I = P\, [ln(P)]^2 - 2 \int P\, ln(P)\, \frac{1}{P}\, dP = P\, [ln(P)]^2 - 2 \int ln(P)\ dP =$

$P\, [ln(P)]^2 - 2\,(P\, ln(P) - P) + c = P\, [ln(P)]^2 - 2\, P\, ln(P) + 2P + c$ ❑

3) Obtenga el valor exacto de $\int_0^{\pi} \alpha\ cos(\,\alpha)\, d\alpha$

(15 puntos)

Solución:

Resolvamos la integral indefinida $\int \alpha\ cos(\,\alpha)\, d\alpha$ primero

$I = \int \alpha\ cos(\,\alpha)\, d\alpha = \alpha\ sen(\,\alpha) - \int\ sen(\,\alpha)\, d\alpha = \alpha\ sen(\,\alpha) + cos(\,\alpha)$

$p' = cos(\,\alpha)\ \Rightarrow p = sen(\,\alpha)$

$q = \alpha \Rightarrow q' = 1$

Luego, $\int_0^{\pi} \alpha\ cos(\,\alpha)\, d\alpha = \left[\alpha\ sen(\,\alpha) + cos(\,\alpha)\right]_0^{\pi} =$

$\pi\, sen(\pi) + cos(\pi) - 0\, sen(0) - cos(0) = 0 - 1 - 0 - 1 =\ -2$ ❑

4) Resuelva $\int \frac{\sqrt{x+3}}{x+2}\, dx$

(15 puntos)

Solución:

Haciendo $z^2 = x + 3$ se tiene que $2z\, dz = dx$ y $x = z^2 - 3$

$\int \frac{\sqrt{x+3}\, dx}{x+2} = \int \frac{z\, 2z\, dz}{z^2-3+2} = 2\int \frac{z^2\, dz}{z^2-1}$

$z^2 : z^2 - 1 \quad = \quad 1$

${}^{(-)}z^2 - {}^{(+)}1$

1

Dividiendo,

$\frac{z^2}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{z^2-1}$

Notemos que: $\frac{2}{z^2-1} = \frac{2}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$

pues, $\frac{2}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} \Rightarrow 2 = A(z+1) + B(z-1)$

Con $z = -1$, se tiene $-2B = 2 \Rightarrow B = -1$
Con $z = 1$, se tiene $2A = 2 \Rightarrow A = 1$

Luego, recordando que $z = \sqrt{x+3}$, se tiene

$$\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{x+2} = 2\int \frac{z^2\,dz}{z^2-1} = 2\int dz + \int \frac{2}{z^2-1}\,dz$$
$$= 2\int dz + \int \frac{2}{(z+1)(z-1)}dz = 2\int dz + \int \frac{1}{z-1}dz - \int \frac{1}{z+1}dz$$
$$= 2z + ln|z-1| - ln|z+1| = 2\,z + ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c$$
$$= 2\sqrt{x+3} + ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right| + c$$

Finalmente,
$$\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{x+2} = 2\sqrt{x+3} + ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right| + c\ ,$$
con c una constante real cualquiera. □