UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 1 CÁLCULO AVANZADO
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1HORA 30 MINUTOS **FECHA : Mi 20/04/22**

1) Resuelva la EDO $y'' = 2\,cos(t) + e^{2t} - \frac{1}{t}$

(15 puntos)

Solución:

$$y'' = 2\,cos(t) + e^{2t} - \tfrac{1}{t} \Rightarrow \int y''dt = 2\int cos(t)dt + \int e^{2t}dt - \int \tfrac{1}{t}dt \Rightarrow$$

$$y' = 2\,sen(t) + \tfrac{1}{2}\,e^{2t} - ln(t) + c_1 \Rightarrow$$

$$\int y'dt = 2\int sen(t)dt + \tfrac{1}{2}\int e^{2t}dt - \int ln(t)dt + \int c_1 dt \Rightarrow$$

$$y(t) = \; -2\,cos(t) + \tfrac{1}{4}\,e^{2t} - t\,ln(t) + t + c_1\,t + c_2 \quad \square$$

2) Una partícula se mueve en línea recta con una aceleración igual a $3 - t^2\,[\frac{m}{s^2}]$. Sabiendo que en el instante inicial igual a $4\;[s]$, la velocidad de la partícula es $7[\frac{m}{s}]$, obtenga la expresión de la velocidad en cualquier instante.

(15 puntos)

Solución:

Tenemos que $v(t) = \int a(t)\,dt$

$$v(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = \int (3 - t^2)\,dt \Rightarrow v(t) = \int 3\,dt - \int t^2\,dt \Rightarrow$$

$$v(t) = 3\,t - \tfrac{1}{3}\,t^3 + c$$

$$v(4) = 7 \Rightarrow 12 - \tfrac{64}{3} + c = 7 \Rightarrow c = 7 - 12 + \tfrac{64}{3} \Rightarrow c = \tfrac{49}{3}$$

La velocidad en cualquier instante t es $v(t) = 3\,t - \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{49}{3}$ $\square$

3) Resuelva $\int cos^3(q)\,dq$

(15 puntos)

Solución:

$$\int cos^3(q)\,dq = \int cos^2(q)\,cos(q)\,dq = \int \left[1 - sen^2(q)\right] cos(q)\,dq =$$

$$\int cos(q)\,dq - \int sen^2(q)\,cos(q)\,dq = sen(q) - \int sen^2(q)\,cos(q)\,dq$$

Para calcular la integral $\int sen^2(q)\,cos(q)\,dq$ usamos la sustitución $P = sen(q)$

$P = sen(q) \Rightarrow dP = cos(q)\,dq$

Luego

$$\int sen^2(q)\,cos(q)\,dq = \int P^2\,dP = \frac{1}{3}\,P^3 - c = \frac{1}{3}\,sen^3(q) - c$$

Finalmente, $\int cos^3(q)\,dq = sen(q) - \frac{1}{3}\,sen^3(q) + c$ $\square$

4) Calcule $\int_0^{1/2} x\ Arccos(x)\,dx$

(15 puntos)

Solución:

Calculemos la integral indefinida asociada $\int x\ Arccos(x)\,dx$

Usando integración por partes

$p' = x \Rightarrow p = \frac{1}{2}\,x^2$

$q = Arccos(x) \Rightarrow q' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int x\ Arccos(x)\,dx = \frac{1}{2}\,x^2\ Arccos(x) + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Para calcular la integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, usaremos la sustitución trigonométrica $x = sen(\alpha)$

$x = sen(\alpha) \Rightarrow dx = cos(\alpha)\,d\alpha$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{sen^2(\alpha)}{\sqrt{1-sen^2(\alpha)}} = \frac{sen^2(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{sen^2(\alpha)}{cos(\alpha)} cos(\alpha)\, d\alpha = \int sen^2(\alpha)\, d\alpha = \int \left[\frac{1}{2} - \frac{cos(2\alpha)}{2}\right] d\alpha =$$

$$\frac{1}{2}\int d\alpha - \frac{1}{2}\int cos(2\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\, sen(2\alpha)$$

Debemos volver a la variable original que es x
$x = sen(\alpha) \Rightarrow \alpha = Arcsen(x)$

$$sen(2\alpha) = 2\, sen(\alpha)\, cos(\alpha) = 2\, sen(\alpha)\, \sqrt{1 - sen^2(\alpha)} = 2\, x\, \sqrt{1-x^2}$$

De lo anterior, se tiene que:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\, sen(2\alpha) = \frac{1}{2} Arcsen(x) - \frac{1}{4}\, 2\, x\, \sqrt{1-x^2} =$$

$$\frac{1}{2} Arcsen(x) - \frac{1}{2}\ x\, \sqrt{1-x^2}$$

Usando este último resultado, tenemos que

$$\int x\ Arccos(x)\, dx = \frac{1}{2}\, x^2\, Arccos(x) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} Arcsen(x) - \frac{1}{2}\ x\, \sqrt{1-x^2}\ \right] =$$

$$\frac{1}{2}\, x^2\, Arccos(x) + \frac{1}{4} Arcsen(x) - \frac{1}{4}\ x\, \sqrt{1-x^2}$$

Evaluando

$$\int_0^{1/2} x\ Arccos(x)\, dx = \left[\frac{1}{2}\, x^2\, Arccos(x) + \frac{1}{4} Arcsen(x) - \frac{1}{4}\ x\, \sqrt{1-x^2}\ \right]_0^{1/2} =$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ Arccos(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{4} Arcsen(\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \sqrt{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\, 0\, Arccos(0) - \frac{1}{4} Arcsen(0)$$

$$+ \frac{1}{4}\ 0\, \sqrt{1-0} = \frac{1}{8}\ \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{8}\ \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{24} - \frac{1}{8}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}$$

Finalmente, $\int_0^{1/2} x\ Arccos(x)\, dx = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}$ ❑