UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño
02/09/2022

EJERCICIO INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Resuelva la integral $\int tg^2(x)\, sec^3(x)\, dx$

Solución:

Sea $I = \int tg^2(x)\, sec^3(x)\, dx$

Tenemos que $tg^2(x) = sec^2(x) - 1$, luego

$I = \int tg^2(x)\, sec^3(x)\, dx = \int (sec^2(x) - 1)\, sec^3(x)\, dx =$

$\int sec^5(x)\, dx - \int sec^3(x)\, dx$

Sean $A = \int sec^3(x)\, dx$ y $B = \int sec^5(x)\, dx$, de donde

$$I = B - A \qquad (1)$$

Obtengamos $A = \int sec^3(x)\, dx$

$A = \int sec^3(x)\, dx = \int sec^2(x)\, sec(x)\, dx = \int sec^2(x)\, sec(x)\, dx$

Usando integración por partes, se tiene

$p = sec(x) \Rightarrow p' = sec(x)\, tg(x)$

$q' = sec^2(x) \Rightarrow q = tg(x)$

$A = sec(x)\, tg(x) - \int sec(x)\, tg^2(x)\, dx$

Sea $C = \int sec(x)\, tg^2(x)\, dx$, luego

$$A = sec(x)\, tg(x) - C \qquad (2)$$

Determinemos C

$C = \int sec(x)\, tg^2(x)\, dx = \int sec(x)\, (sec^2(x) - 1)\, dx =$

$\int sec^3(x)\, dx - \int sec(x)\, dx = A - ln(sec(x) + tg(x))$

Es decir,

$$C = A - ln(sec(x) + tg(x)) \qquad (3)$$

De (2) y (3)
$A = sec(x)\,tg(x) - C = sec(x)\,tg(x) - \big[A - ln(sec(x) + tg(x))\big] \Rightarrow$
$A = sec(x)\,tg(x) - A + ln(sec(x) + tg(x)) \Rightarrow$
$2A = sec(x)\,tg(x) + ln(sec(x) + tg(x)) \Rightarrow$
$A = \frac{1}{2}\big[sec(x)\,tg(x) + ln(sec(x) + tg(x))\big]$

Esto significa que
$\displaystyle\int sec^3(x)\,dx = \frac{1}{2}sec(x)\,tg(x) + \frac{1}{2}ln(sec(x) + tg(x))$

De (3)
$C = A - ln(sec(x) + tg(x)) =$
$\frac{1}{2}sec(x)\,tg(x) + \frac{1}{2}ln(sec(x) + tg(x)) - ln(sec(x) + tg(x)) =$
$\frac{1}{2}sec(x)\,tg(x) - \frac{1}{2}ln(sec(x) + tg(x))$

Esto significa que
$\displaystyle\int sec(x)\,tg^2(x)\,dx = \frac{1}{2}sec(x)\,tg(x) - \frac{1}{2}ln(sec(x) + tg(x))$

Obtengamos $B = \displaystyle\int sec^5(x)\,dx$

$B = \displaystyle\int sec^5(x)\,dx = \int sec^2(x)\,sec^3(x)\,dx$
Usando integración por partes
$p = sec^3(x) \Rightarrow p' = 3\,sec^2(x)\,sec(x)\,tg(x)$
$q' = sec^2(x) \Rightarrow q = tg(x)$

$B = sec^3(x)\,tg(x) - 3\displaystyle\int sec^3(x)\,tg^2(x)\,dx = sec^3(x)\,tg(x) - 3\,I$

De (1)
$I = B - A \Rightarrow I = sec^3(x)\,tg(x) - 3\,I - \frac{1}{2}\big[sec(x)\,tg(x) + ln(sec(x) + tg(x))\big] \Rightarrow$
$4\,I = sec^3(x)\,tg(x) - \frac{1}{2}sec(x)\,tg(x) - \frac{1}{2}ln(sec(x) + tg(x)) \Rightarrow$
$I = \frac{1}{4}\big[sec^3(x)\,tg(x) - \frac{1}{2}sec(x)\,tg(x) - \frac{1}{2}ln(sec(x) + tg(x))\big] \Rightarrow$
$I = \frac{1}{4}sec^3(x)\,tg(x) - \frac{1}{8}sec(x)\,tg(x) - \frac{1}{8}ln(sec(x) + tg(x))$

Esto muestra que
$I = \displaystyle\int tg^2(x)\,sec^3(x)\,dx = \frac{1}{4}sec^3(x)\,tg(x) - \frac{1}{8}sec(x)\,tg(x) - \frac{1}{8}ln(sec(x) + tg(x))$

Observación:
He omitido la constante c en todo el desarrollo, por simplicidad ❑