UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño
Octubre 2026

LISTADO DE EJERCICIOS 3 CÁLCULO II
INGENIERÍA AMBIENTAL

1) En los siguientes ejercicios dibuje la curva representada por las ecuaciones paramétricas dadas y además elimine el parámetro para obtener la ecuación cartesiana de la curva.

$a)\, x = 1 - t\,;\; y = 2 + 2t$
$b)\, x = 3t^2\,;\; y = 2 + 5t,\; 0 \leq t \leq 2$
$c)\, x = \sqrt{t}\,;\; y = 1 - t$
$d)\, x = sen(\alpha)\,;\; y = cos(\alpha)\,,\; 0 \leq \alpha \leq \pi$
$e)\, x = sec(\alpha)\,;\; y = tg(\alpha),\; -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$
$f)\, x = e^t\,;\; y = e^t$
$g)\, x = cosh(t)\,;\; y = senh(t)$
$h)\, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,;\; y = \frac{2t}{1+t^2}$

2) Una partícula se dispara desde el origen con rapidez inicial v_0 y ángulo de elevación α respecto a la horizontal. El terreno circundante asciende de forma continua según una pendiente uniforme de ángulo θ (con $0 < \theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$), donde la recta que indica la inclinación del terreno es $y = x\, tg(\theta)$.
Las ecuaciones paramétricas del vuelo son:

$x = v_0\, cos(\alpha)\, t$
$y = v_0\, sen(\alpha)t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$

Obtenga el tiempo de vuelo hasta que se produce el impacto y además determine la distancia recorrida por la partícula.

3) Sabemos que el área A bajo la curva $y = f(x)$ desde a a b está dada por la fórmula $A = \int_a^b f(x)\, dx$, donde $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$. Si la curva está dada en coordenadas paramétricas $x = g(t)$ y $y = h(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, entonces podemos adaptar la fórmula anterior y escribir

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx = \int_\alpha^\beta h(t)\, g'(t)\, dt$$

$a)$ Muestre que el área bajo un arco del cicloide $x = r(\theta - sen(\theta))$, $y = r(1 - cos(\theta))$ es $3\pi\, r^2$
$b)$ Muestre que el área encerrada por el astroide $x = a\, cos^3(\theta)$, $y = a\, sen^3(\theta)$ es $\frac{3}{8}\pi a^2$

4) Si una curva C es descrita por las ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ y $y = h(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, donde g' y h' son continuas en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y C es recorrida exactamente una vez cuando t va de α a β, entonces la longitud L de C está dada por

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$a)$ Calcule la longitud de una circunferencia unitaria, usando coordenadas paramétricas

$b)$ Calcule la longitud de la curva $x = 1 + 2\,sen(\pi t)$, $y = 3 - 2\,cos(\pi t)$, $0 \le t \le 1$

$c)$ Muestre que la longitud total del astroide $x = a\,cos^3(\theta)$, $y = a\,sen^3(\theta)$ es $6a$

5) Convierta

$a)$ el punto $(1, \frac{\pi}{3})$ a coordenadas cartesianas

$b)$ el punto $(2, -1)$ a coordenadas polares

6) Convierta a coordenadas cartesianas

$a)\ \alpha = \pi$

$b)\ r = \frac{1}{1-cos(\alpha)}$

$c)\ r^2 = sen(2\alpha)$

6) Muestre que:

$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - 1$ $\qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!} = cos(x)$

$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} = ln(1+x)$ $\qquad d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = senh(x)$

7) Calcule, si es posible, el límite de las siguientes sucesiones

$a)\ \left\{\frac{1}{4\,n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} (S = 0)$ $\qquad b)\ a_n = \frac{4n-3}{3n+4}$ $\qquad c)\ \left\{\frac{1}{n^p}\right\},\ p \in \mathbb{R}$

$d)\ \left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} (S = 0)$ $\qquad e)\ a_n = \frac{ln(n)}{n}$ $\qquad f)\ a_n = \frac{n!}{2^n}$

8) Obtenga, si es posible, la suma de las siguientes series

$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\ (S = 1) c)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}\, 3^{1-n}\, d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}\ (S = D.V.)$

$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right) f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right) (S = 5)$

9) Obtenga la serie de Taylor de las funciones

$a)\ f(x) = e^x$ en $x = 0$ y $x = 1$

$b)\ f(x) = sen(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$

$c)\ f(x) = cos(x)$ en $x = 1$

$d)\ f(x) = ln(x)$ en $x = 2$

10) Obtenga la serie de Maclaurin de las funciones

$a)\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$b)\ f(x) = Arctg(x)$

$c)\ f(x) = e^{3x}$

$d)\ f(x) = sen(2x)$

$e)\ f(x) = x^3\, e^{-2x}$

$f)\ f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

11) Sea $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$a)$ Obtenga el dominio de f

$b)$ Calcule $f(1,1),\ f(2,1),\ f(0,0)\ ,\ f(3,4)$ y $f(-1,\ -1)$

$c)$ Obtenga $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_{yy}, f_{xy} y f_{yx}

12) $a)$ Muestre que la función $u(x,y) = e^x\, sen(y)$ es solución de la ecuación diferencial parcial de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$b)$ Verifique que $u(x,t) = sen(x - at)$ satisface la ecuación de la onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

13) Obtenga la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1,1,3)$

14) Obtenga $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si

$a)\ xy + yz - xz = 3$

$b)\ xyz = cos(x + y + z)$

$c)\ y^2 z\, e^{x+y} - sen(xyz) = x^3 + 1$

$d)\ z^2 + y^2 - x^3 = tg(x + y) - z$

15) Calcule las integrales iteradas

$a)\ \int_0^4 \int_0^2 x\, \sqrt{y}\ dx\, dy$

$b)\ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} sen(x + y)\ dy\, dx$

$c)\ \int_0^2 \int_0^3 e^{x-y}\, dy\, dx$

$d)\ \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy$

16) Calcule las integrales dobles

$a)\ \int_R \int (2y^2 - 3xy^3)\, dA$, donde $R = \{(x,y)/1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$

$b)\ \int_R \int (xy^2 + \frac{y}{x})\, dA$, donde $R = \{(x,y)/2 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 0\}$

$c)\ \int_R \int x\, e^{xy}\ dA$, donde $R = [0,1] \times [0,1]$

$d)\ \int_R \int \frac{1}{x+y}\ dA$, donde $R = [1,2] \times [0,1]$

17) La integral doble $\int_R \int f(x,y)\, dA$ se puede interpretar como el volumen del sólido S que está sobre R y bajo la superficie $z = f(x,y)$.

Obtenga el volumen del sólido

$a)$ que está bajo el plano $z = 2x + 5y + 1$ y arriba del rectángulo $[-1,0] \times [1,4]$

$b)$ que está bajo el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$ y arriba del rectángulo $[-1,1] \times [-2,2]$

$c)$ acotado por la superficie $z = 6 - xy$ y los planos $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$, $y = 3$ y $z = 0$

18) El valor promedio de una función $f(x,y)$ sobre un rectángulo R está dado por $f_{prom} = \frac{1}{A(R)} \int_R \int f(x,y)\, dA$, donde $A(R)$ representa el área de la región R.

Calcule el valor promedio de f sobre el rectángulo R

$a)$ $f(x,y) = x^2 y$, donde R tiene vértices $(-1,0)$, $(-1,5)$, $(1,5)$ y $(1,0)$

$b)$ $f(x,y) = x\, sen(xy)$, donde $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$