UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 5 CÁLCULO INTEGRAL + EDO
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :_____CARRERA. :_____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA **FECHA : Ju 06/06/19**

1) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de las curvas $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$

(30 puntos).

Solución:

Determinemos en qué puntos $f(x)$ interseca al eje x:

$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^3 - x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(3x^2 - x - 10) = 0$

$\Rightarrow\ x = 0$ ó $3x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{6}$

$\Rightarrow\ x = 0$ ó $x = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{6} \Rightarrow\ x = 0$ ó $x = \frac{1 \pm 11}{6} \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$ ó $x = -\frac{5}{3}$

Determinemos ahora en qué puntos $g(x)$ interseca al eje x:

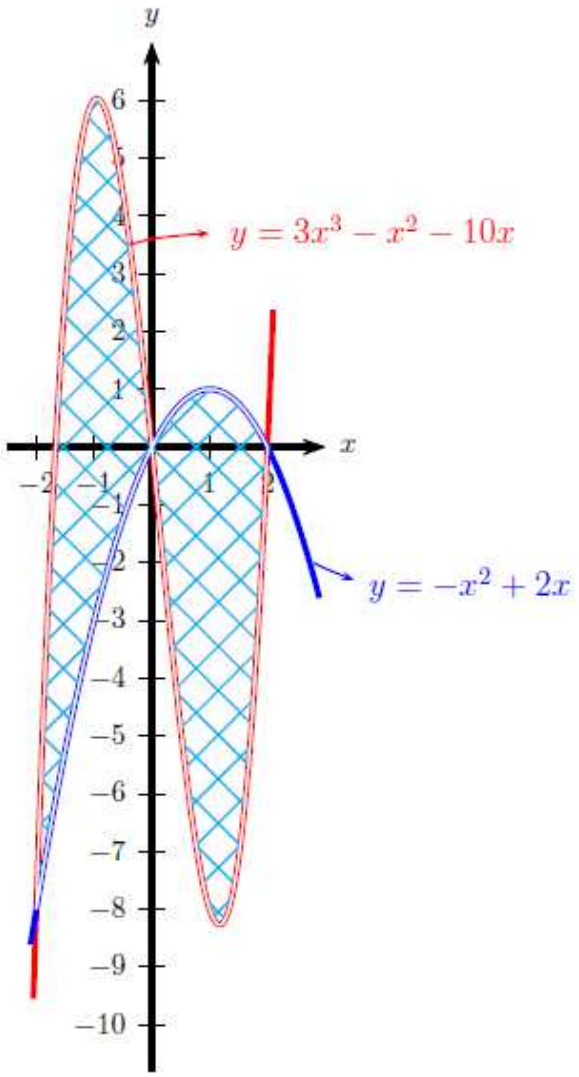
$g(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2$

Obtengamos los puntos de intersección entre las curvas:

$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x \Rightarrow 3x^3 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$
$x = 0$ ó $x^2 = 4 \Rightarrow x = 0$ ó $x = -2$ ó $x = 2$

Los puntos de intersección entre las curvas son: $P_1 = (0, 0),\ P_2 = (-2, -8)$ y $P_3 = (2, 0)$

Considerando lo anterior, la gráfica es



Sea A_1 el área encerrada por la curvas entre -2 y 0

$$A_1 = \int_{-2}^{0} \Big[(3x^3 - x^2 - 10x) - (-x^2 + 2x)\Big] dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x) dx = \left(\tfrac{3}{4}x^4 - 6x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = 12$$

Sea A_2 el área encerrada por la curvas entre 0 y 2

$$A_2 = \int_{0}^{2} \Big[(-x^2 + 2x) - (3x^3 - x^2 - 10x)\Big] dx$$

$$= \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x) dx = \Big[-\tfrac{3}{4}x^4 + 6x^2\Big]\Big|_{0}^{2} = 12$$

Si A representa el área buscada, entonces $A = A_1 + A_2 = 24$

Finalmente, el área de la región encerrada por las gráficas de las curvas $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$ es igual a 24 unidades de área ❑

2) Resuelva el PVI : $y' = 120\ y\,(M - y)$, donde M es una constante positiva, y $y(0) = \frac{M}{2}$

(30 puntos).

Solución:

$y' = 120\,y\,(M - y) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 120\,y\,(M - y) \Rightarrow \frac{dy}{y\,(M-y)} = 120\,dt$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y\,(M-y)} = \int 120\,dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y\,(M-y)} = 120\,t$

Para calcular $\int \frac{dy}{y\,(M-y)}$, usaremos descomposición en suma de fracciones parciales

$\frac{1}{y\,(M-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{M-y} \Rightarrow 1 = A(M - y) + B\,y$

Para $y = 0$, se tiene $1 = A\,M$, de donde $A = \frac{1}{M}$, con $M \neq 0$

Para $y = M$, se tiene $1 = B\,M$, de donde $B = \frac{1}{M}$, con $M \neq 0$

Luego, $\frac{1}{y\,(M-y)} = \frac{1}{M}\frac{1}{y} + \frac{1}{M}\frac{1}{M-y}$

De donde, $\int \frac{dy}{y\,(M-y)} = \frac{1}{M}\int \frac{1}{y}dy + \frac{1}{M}\int \frac{1}{M-y}dy = \frac{1}{M}\,ln|\,y\,| - \frac{1}{M}\,ln|\,M - y\,|$

$= \frac{1}{M} ln\left|\frac{y}{M-y}\right|$

Así

$\frac{1}{M} ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = 120t + c \Rightarrow ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = 120M\,t + Mc \Rightarrow \frac{y}{M-y} = d\,e^{120M\,t}$,

con $d = e^{Mc}$ constante $\Rightarrow y = M\,d\,e^{120M\,t} - y\ d\,e^{120M\,t}$

$\Rightarrow (1 + d\,e^{120M\,t})\,y = M\,d\,e^{120M\,t}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{M\,d\,e^{120M\,t}}{1+\,d\,e^{120M\,t}}$

Ahora, consideremos la condición inicial $y(0) = \frac{M}{2}$

$y(0) = \frac{M\,d}{1+\,d} = \frac{M}{2} \Rightarrow M\,d = \frac{M}{2} + \frac{M}{2}\,d \Rightarrow \frac{M}{2}\,d = \frac{M}{2} \Rightarrow d = 1$

Finalmente, la solución del PVI es $y(t) = \frac{M\ e^{120M\,t}}{1+\,e^{120M\,t}}$ ❑