

PAUTA TEST N° 5 CÁLCULO INTEGRAL + EDO
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA
AMBIENTAL – INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE : _____ **NOTA :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Ju 15/05/14**

1) Resuelva la E.D.O. siguiente: $x y' + y^2 = 1$

(30 puntos).

Solución:

$$x y' + y^2 = 1 \Rightarrow x y' = 1 - y^2 \Rightarrow x \frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{1-y^2} = \ln(x)$$

Calculemos $\int \frac{dy}{1-y^2}$ usando fracciones parciales.

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} \Rightarrow A(1+y) + B(1-y) = 1$$

$$y = 1 : 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$y = -1 : 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Luego

$$\frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right]$$

Así

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{1-y} dy + \int \frac{1}{1+y} dy \right] = \frac{1}{2} \left[\ln(1-y) + \ln(1+y) \right]$$

Reemplazando en $\int \frac{dy}{1-y^2} = \ln(x)$ se tiene que:

$$\frac{1}{2} \left[\ln(1-y) + \ln(1+y) \right] = \ln(x) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$ constante cualquiera. $\square$

2) Resuelva el P.V.I. siguiente:

$$\frac{dM}{dt} = 25000 t$$

$$M(20) = 1520000$$

(30 puntos).

Solución:

Resolvamos, en primer lugar, la ecuación diferencial

$$\frac{dM}{dt} = 25000 t \Rightarrow dM = 25000 t dt \Rightarrow \int dM = 25000 \int t dt \Rightarrow$$

$$M(t) = 25000 \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow M(t) = 12500 t^2 + c$$

Consideremos ahora la condición inicial $M(20) = 1520000$

$$M(20) = 1520000 \Rightarrow 12500$$

$$(20)^2 + c = 1520000 \Rightarrow 5000000 + c = 1520000 \Rightarrow c = -3480000$$

Finalmente la solución del P.V.I. es

$$M(t) = 12500 t^2 - 3480000 \quad \square$$