UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 4 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 20 MINUTOS FECHA : Mi 16/10/13

1) Obtenga $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$

(15 puntos).

<u>Solución:</u>

Primero dividamos:

$x^2+1 : x-1 = x+1$
$^{(-)}x^2 - ^{(+)}x$
$----------$
$x+1$
$x^{(-)} - ^{(+)}1$
$-------------$
2

Del cálculo anterior se desprende que:

$$\frac{x^2+1}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1}$$

Integrando:

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx = \int x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\,ln(x-1) + c$$

Finalmente:

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\ dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\,ln(x-1) + c$$

donde c es una constante real cualquiera $\square$

2) Muestre que : $\int_{-1}^{1} |\,t^2 - 3t + 1|\ dt = \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{6}$

(15 puntos).

Solución:

Primero calculemos las raíces del polinomio $t^2 - 3t + 1$

$$t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.38 \\ t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.61 \end{cases}$$

Notamos que sólo $t = t_1$ pertenece al intervalo de integración por lo que $t = t_2$ no lo consideramos

Contruyamos ahora una tabla de signos para identificar los intervalos donde el polinomio es positivo o negativo

	$-1 < t < t_1$	$t = t_1$	$t_1 < t < 1$
$t^2 - 3t + 1$	$+$	0	$-$

De la tabla anterior se concluye que:

$$\int_{-1}^{1} |\,t^2 - 3t + 1|\ dt = \int_{-1}^{t_1} (t^2 - 3t + 1)\ dt + \int_{t_1}^{1} -(t^2 - 3t + 1)\ dt =$$

$$\left(\frac{t^3}{3} - 3\,\frac{t^2}{2} + t\right)\Bigg|_{-1}^{t_1} + \left(-\frac{t^3}{3} + 3\,\frac{t^2}{2} - t\right)\Bigg|_{t_1}^{1} =$$

$$\frac{t_1^3}{3} - 3\,\frac{t_1^2}{2} + t_1 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 1\right) - \left(-\frac{t_1^3}{3} + 3\,\frac{t_1^2}{2} - t_1\right) =$$

$\frac{t_1^3}{3} - 3\,\frac{t_1^2}{2} + t_1 + \frac{1}{3} + \ \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{3} + \ \frac{3}{2} - 1 + \frac{t_1^3}{3} - 3\,\frac{t_1^2}{2} + t_1 =$

$2\frac{t_1^3}{3} - 3\,t_1^2 + 2\,t_1 + 3 = 6 - \frac{8}{3}\sqrt{5} - \frac{21}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{5} \ + 3 - \sqrt{5} + 3 = \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{6}$

Notemos que:

$t_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$t_1^2 = \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$t_1^3 = 9 - 4\sqrt{5}$

Finalmente hemos mostrado que:

$\int_{-1}^{1} |\,t^2 - 3t + 1|\ dt = \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{6}$ ❑

3) Resuelva la integral $\int \alpha\ sen(\alpha^2)\ cos(3\,\alpha^2)\ d\alpha$

(15 puntos).

<u>Solución:</u>

Consideremos la sustitución simple $x = \alpha^2$

$x = \alpha^2 \Rightarrow dx = 2\alpha\, d\alpha \Rightarrow \alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\, dx$

Reemplazando en la integral se tiene:

$\int \alpha\ sen(\alpha^2)\ cos(3\,\alpha^2)\ d\alpha = \ \frac{1}{2}\int\ sen(x)\ cos(3\,x)\ dx$

Resolvamos ahora la integral $\frac{1}{2}\int\ sen(x)\ cos(3\,x)\ dx$ recordando que

$sen(z)\,cos(w) = \frac{1}{2}\Big[\,sen(z+w) + sen(z-w)\Big]$

Luego, si consideramos $z = x$ y $w = 3x$, y además recordamos que seno es una función impar, se tiene que:

$$\frac{1}{2}\int sen(x)\ cos(3\,x)\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\Big[sen(x+3x) + sen(x-3x)\Big]\, dx =$$

$$\frac{1}{4}\int sen(4x)\, dx + \frac{1}{4}\int sen(-2x)\, dx = \frac{1}{4}\int sen(4x)\, dx - \frac{1}{4}\int sen(2x)\, dx =$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{cos(4x)}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{cos(2x)}{2} + c = -\frac{1}{16}\,cos(4x) + \frac{1}{8}cos(2x) + c$$

Volviendo a la variable original, finalmente concluimos que :

$$\int \alpha\ sen(\alpha^2)\ cos(3\,\alpha^2)\ d\alpha = -\frac{1}{16}\,cos(4\alpha^2) + \frac{1}{8}cos(2\alpha^2) + c$$

donde c es una constante real cualquiera $\square$

4) Obtenga $\int x^n\, ln(x)\ dx$ para $n \in \mathbb{Z}$

(15 puntos).

<u>Solución:</u>

Usemos integración por partes

$$p = ln(x) \Rightarrow p' = \frac{1}{x}$$

$$q' = x^n \Rightarrow q = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\,,\ n \neq -1$$

$$\int x^n\, ln(x)\ dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\,ln(x) - \frac{1}{n+1}\int x^n\ dx =$$

$$\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\,ln(x) - \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\,ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2}\,x^{n+1} + c$$

Consideremos ahora el caso $n = -1$:

$$\int x^n\, ln(x)\ dx = \int x^{-1}\, ln(x)\ dx = \int \frac{ln(x)}{x}\ dx$$

Usemos la sustitución simple $B = ln(x)$

$B = ln(x) \Rightarrow dB = \frac{1}{x}\, dx$

$$\int \frac{ln(x)}{x}\ dx = \int ln(x)\ \frac{1}{x}\ dx = \int B\, dB = \frac{B^2}{2} + c = \frac{\left[ln(x)\right]^2}{2} + c$$

De lo anterior se concluye que:

$$\int \frac{ln(x)}{x}\ dx = \frac{\left[ln(x)\right]^2}{2} + c$$

Finalmente

$$\int x^n\, ln(x)\ dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\, ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2}\, x^{n+1} + c & \text{, para } n \neq\ -1 \\ \frac{\left[ln(x)\right]^2}{2} + c & \text{, para } n =\ -1 \end{cases}$$

donde c es una constante real cualquiera $\square$