

PAUTA TEST N° 4 CÁLCULO INTEGRAL + EDO
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA
AMBIENTAL – INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE : _____ **NOTA :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Lu 28/04/14**

1) Obtenga $\int \frac{4x}{x^3-3x^2+6x-4} dx$

(30 puntos).

Solución:

Notemos que $x = 1$ es raíz del denominador, esto significa que $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ es divisible por $x - 1$.

Luego

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 6x - 4 : x - 1 = x^2 - 2x + 4 \\ (-) x^3 - (+) x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ - 2x^2 + 6x - 4 \\ - (+) 2x^2 + (-) 2x \\ \text{-----} \\ 4x - 4 \\ (-) 4x - (+) 4 \\ \text{-----} \\ 0 \end{array}$$

De lo anterior, se tiene que

$$\frac{4x}{x^3-3x^2+6x-4} = \frac{4x}{(x-1)(x^2-2x+4)}$$

Notemos además que $x^2 - 2x + 4$ es irreducible en $\mathbb{R}$, pues

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} \in \mathbb{C}$$

Luego

$$\frac{4x}{(x-1)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} \Rightarrow A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x-1) = 4x$$

Considerando distintos valores de x , se tiene que

$$x = 1 : 3A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

$$x = 0 : 4A - C = 0 \Rightarrow C = 4A \Rightarrow C = \frac{16}{3}$$

$$x = -1 : 7A - 2(-B+C) = -4 \Rightarrow 7A + 2B - 2C = -4 \Rightarrow B = \frac{2C-7A-4}{2} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\frac{32}{3} - \frac{28}{3} - 4}{2} \Rightarrow B = \frac{\frac{4}{3} - 4}{2} \Rightarrow B = \frac{-\frac{8}{3}}{2} \Rightarrow B = -\frac{8}{6} \Rightarrow B = -\frac{4}{3}$$

De lo anterior, se tiene que

$$\frac{4x}{(x-1)(x^2-2x+4)} = \frac{4}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{4}{3}x + \frac{16}{3}}{x^2-2x+4} \Rightarrow$$

$$\int \frac{4x}{(x-1)(x^2-2x+4)} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{4}{3}x + \frac{16}{3}}{x^2-2x+4} dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{4x}{(x-1)(x^2-2x+4)} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{4}{3} \int \frac{x-4}{x^2-2x+4} dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{4x}{(x-1)(x^2-2x+4)} dx = \frac{4}{3} \ln(x-1) - \frac{4}{3} \int \frac{x-4}{x^2-2x+4} dx$$

Calculemos $\int \frac{x-4}{x^2-2x+4} dx$

Completando cuadrados

$$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 - 1 + 4 = (x-1)^2 + 3 = (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2$$

Consideremos la sustitución $x-1 = \sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha)$

$$x-1 = \sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha) \Rightarrow dx = \sqrt{3} \sec^2(\alpha) d\alpha$$

$$(x-1)^2 + 3 = 3 \operatorname{tg}^2(\alpha) + 3 = 3 [\operatorname{tg}^2(\alpha) + 1] = 3 \sec^2(\alpha)$$

$$x-1 = \sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha) \Rightarrow x = 1 + \sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$x-1 = \sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha) \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{Arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sec(\alpha) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{3} + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 - 2x + 4} \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$$

Reemplazando en la integral

$$\int \frac{x-4}{x^2-2x+4} dx = \int \frac{1+\sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha)-4}{3 \sec^2(\alpha)} \sqrt{3} \sec^2(\alpha) d\alpha =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \int [\sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha) - 3] d\alpha = \int \operatorname{tg}(\alpha) d\alpha - \sqrt{3} \int d\alpha =$$

$$- \ln[\cos(\alpha)] - \sqrt{3} \alpha + c_1 =$$

$$- \ln\left[\sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}\right] - \sqrt{3} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Finalmente

$$\int \frac{4x}{(x-1)(x^2-2x+4)} dx =$$

$$\frac{4}{3} \ln(x-1) + \frac{4}{3} \ln\left[\sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}\right] + \frac{4}{3} \sqrt{3} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad \square$$

2) Muestre que : $\int_2^3 \frac{x^2+3}{(x-1)(x+2)} dx = 1 + 6 \ln(2) - \frac{7}{3} \ln(5)$

(30 puntos).

Solución:

Notemos que:

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+3}{x^2+x-2}$$

Debemos dividir

$$\begin{array}{r} x^2 + 3 : x^2 + x - 2 = 1 \\ (-) x^2 + (-) x - (+) 2 \\ \hline -x + 5 \end{array}$$

Luego

$$\frac{x^2+3}{x^2+x-2} = 1 + \frac{-x+5}{x^2+x-2}$$

Descompongamos ahora el cuociente $\frac{-x+5}{x^2+x-2}$ usando fracciones parciales

$$\frac{-x+5}{x^2+x-2} = \frac{-x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow -x+5 = A(x+2) + B(x-1)$$

Reemplazando x por valores apropiados (las raíces del denominador) podemos obtener el valor de las constantes

$$x = 1 : 4 = 3A \Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

$$x = -2 : 7 = -3B \Rightarrow B = -\frac{7}{3}$$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{-x+5}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \int \frac{-x+5}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{7}{3} \int \frac{1}{x+2} dx \Rightarrow \\ \int \frac{-x+5}{(x-1)(x+2)} dx &= \frac{4}{3} \ln(x-1) - \frac{7}{3} \ln(x+2) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2+3}{(x-1)(x+2)} dx &= \int_2^3 dx + \int_2^3 \frac{-x+5}{x^2+x-2} dx = \left[x + \frac{4}{3} \ln(x-1) - \frac{7}{3} \ln(x+2) \right]_2^3 = \\ 3 - 2 + \frac{4}{3} \ln(3-1) - \frac{7}{3} \ln(3+2) - \frac{4}{3} \ln(2-1) + \frac{7}{3} \ln(2+2) &= \\ 1 + \frac{4}{3} \ln(2) - \frac{7}{3} \ln(5) - \frac{4}{3} \ln(1) + \frac{7}{3} \ln(4) &= 1 + \frac{4}{3} \ln(2) - \frac{7}{3} \ln(5) + \frac{7}{3} \ln(2^2) = \\ 1 + \frac{4}{3} \ln(2) - \frac{7}{3} \ln(5) + \frac{14}{3} \ln(2) &= 1 + 6 \ln(2) - \frac{7}{3} \ln(5) \quad \square \end{aligned}$$