UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 3 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____CARRERA. :________
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS FECHA : Ju 18/10/18

Resuelva las integrales:

$a)\ \int \frac{1}{\sqrt{9x^2+6x-8}}\, dx$

(30 puntos).

Solución:

Como $9x^2+6x-8 = 9(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}) = 9(x+\frac{1}{3})^2-9 = (3x+1)^2-9$, con $u = 3x+1$, se tiene $du = 3\,dx$, $dx = \frac{du}{3}$ y $(3x+1)^2-9 = u^2-9 = u^2-3^2$

Así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}} = \int \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-9}}$$

Con $u = 3sec(\alpha)$, se tiene que $u^2-9 = 9(sec^2(\alpha)-1) = 9\,tg^2(\alpha)$, $\sqrt{u^2-9} = 3\, tg(\alpha)$, $tg(\alpha) = \frac{\sqrt{u^2-9}}{3}$, $sec(\alpha) = \frac{u}{3}$ y $du = 3\,sec(\alpha)\,tg(\alpha)\,d\alpha$

Luego,

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,sec(\alpha)\ tg(\alpha)\,d\alpha}{3\,tg(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{3}\int sec(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{3}ln|sec(\alpha)+tg(\alpha)|+c_1$$

$$= ln\left|\frac{u}{3}+\frac{\sqrt{u^2-9}}{3}\right|+c_1 = \frac{1}{3}ln\left|\frac{u+\sqrt{u^2-9}}{3}\right|+c_1\ ,$$

con c_1 una constante real cualquiera

En consecuencia,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}} = \frac{1}{3}\, ln\left|\frac{3x+1+\sqrt{(3x+1)^2-9}}{3}\right| + c_1$$

$$= \frac{1}{3}\, ln\left|\frac{3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}}{3}\right| + c_1$$

$$= \frac{1}{3} ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}\right| - \frac{1}{3}\, ln(3) + c_1$$

$= \frac{1}{3} ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}\right| + c,$ con $c = c_1 - \frac{1}{3} ln(3)$

Finalmente,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}} = \frac{1}{3}\, ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}\right| + c\ ,$$

con c una constante real cualquiera $\square$

$b)\ \int \frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2+6x+12)}\, dx$

(30 puntos).

Solución:

Notemos que : $x^2+6x+12=0 \Rightarrow x = \frac{-6\,\pm\sqrt{36-48}}{2} \in \mathbb{C}$

Lo anterior muestra que $x^2+6x+12$ es irreducible en $\mathbb{R}$

Luego

$$\frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2+6x+12)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+12} = \frac{A(x^2+6x+12)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)\,(x^2+6x+12)}$$

$$\Rightarrow x^2+7x-6 \equiv A(x^2+6x+12)+(Bx+C)(x+1)$$

Para $x=\,-1,$ se tiene $\,-12 = 7A \Rightarrow A = \,-\frac{12}{7}$

Para $x=0,$ se tiene $\,-6 = 12A + C \Rightarrow C = \,-6-12A \Rightarrow C = \,-6+12\left(\frac{12}{7}\right)$

$$\Rightarrow C = \,-6+\frac{144}{7} \Rightarrow C = \frac{102}{7}$$

Para $x=1,$ se tiene $2 = 19A+2B+2C \Rightarrow B = 1-\frac{19}{2}A - C$

$\Rightarrow B = 1 + \frac{114}{7} - \frac{102}{7} \Rightarrow B = \frac{19}{7}$

$$\int \frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2+6x+12)}\, dx \;=\; -\frac{12}{7}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{7}\int \frac{19x+102}{x^2+6x+12}\, dx$$

Recordemos que $\int \frac{dx}{x+1} = ln|\, x+1\,|$

Resolvamos la integral $\int \frac{19x+102}{x^2+6x+12}\, dx = 19\int \frac{x}{x^2+6x+12}\, dx + 102\int \frac{dx}{x^2+6x+12}$

Tenemos que $x^2+6x+12 = (x+3)^2+3 = (x+3)^2 + (\sqrt{3}\,)^2$, luego consideremos la sustitución trigonométrica $x+3 = \sqrt{3}\, tg(\alpha)$

$$x+3 = \sqrt{3}\, tg(\alpha) \Rightarrow x = \sqrt{3}\, tg(\alpha) - 3 \Rightarrow dx = \sqrt{3}\, sec^2(\alpha)\, d\alpha$$

$$x+3 = \sqrt{3}\, tg(\alpha) \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{x+3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = Arctg\Big(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\Big)$$

$$x^2+6x+12 = (x+3)^2+3 = 3\, tg^2(\alpha)+3 = 3\,(tg^2(\alpha)+1) = 3\, sec^2(\alpha)$$

$$\int \frac{x}{x^2+6x+12}\, dx = \int \frac{\sqrt{3}\, tg(\alpha)-3}{3\, sec^2(\alpha)}\, \sqrt{3}\, sec^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\int (\sqrt{3}\, tg(\alpha)-3)\, d\alpha$$

$$= \int tg(\alpha)\, d\alpha - \sqrt{3}\int d\alpha = -ln|\, cos(\alpha)\,| - \sqrt{3}\;\alpha = -ln\left|\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}\right| - \sqrt{3}\;\alpha$$

$$= -ln\left|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x+3)^2}{3}}}\right| - \sqrt{3}\; Arctg\Big(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\Big) = -ln\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+(x+3)^2}}\right| - \sqrt{3}\; Arctg\Big(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\Big)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+12} = \int \frac{\sqrt{3}\, sec^2(\alpha)\, d\alpha}{3\, sec^2(\alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int d\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\;\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\; Arctg\Big(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\Big)$$

Finalmente, $\int \frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2+6x+12)}\, dx \;=\; -\frac{12}{7}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{7}\int \frac{19x+102}{x^2+6x+12}\, dx$

$$= -\frac{12}{7}\, ln|\, x+1\,| + \frac{1}{7}\Big[19\int \frac{x}{x^2+6x+12}\, dx + 102\int \frac{dx}{x^2+6x+12}\Big]$$

$$= -\frac{12}{7}\, ln|\, x+1\,| - \frac{19}{7}\; ln\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+(x+3)^2}}\right| + \frac{15}{7}\sqrt{3}\; Arctg\Big(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\Big) + c \;\square$$