

PAUTA TEST N° 3 CÁLCULO INTEGRAL + EDO
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA
AMBIENTAL – INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE : _____ CARRERA : _____
TIEMPO MÁXIMO : 30 MINUTOS FECHA : Lu 31/08/15

- 1) Calcule el área bajo la curva $y = 1 - 3x^2$ y el eje horizontal. (30 puntos).

Solución:

La parábola $y = 1 - 3x^2$ la podemos escribir como

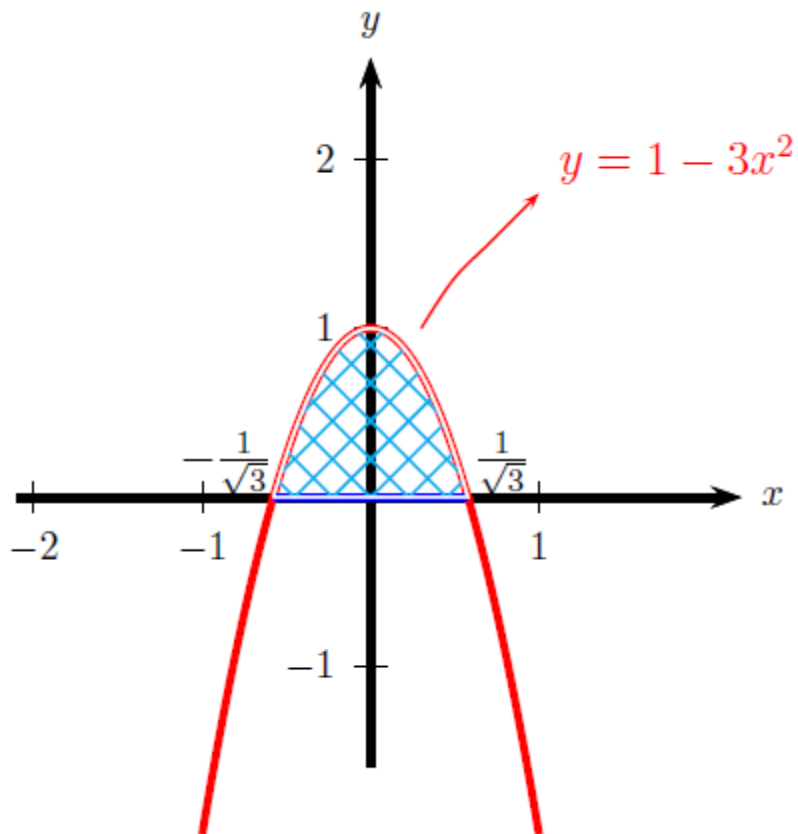
$$y - 1 = -3x^2$$

De lo anterior notamos que el vértice es el punto $(0, 1)$ y la parábola tiene como eje de simetría el eje vertical y además por el signo negativo apunta hacia abajo. Además obtengamos los puntos de intersección de la parábola con el eje horizontal, para ello hacemos $y = 0$, es decir,

$$0 = 1 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0.58$$

Gráficamente se tiene que el área A buscada está dada por la región achurada, como se muestra a continuación



Luego

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1 - 3x^2) dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3x^2 dx = x \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - x^3 \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{(-\sqrt{3})^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{(\sqrt{3})^3} \approx 0.77 \quad \square
 \end{aligned}$$

2) Resuelva el P.V.I. : $y'' - 2t = \cos(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

(30 puntos).

Solución:

Tenemos que

$$y'' - 2t = \cos(t) \Rightarrow y'' = \cos(t) + 2t \Rightarrow \int y'' dt = \int \cos(t) dt + \int 2t dt$$

$$\Rightarrow y'(t) = \sin(t) + t^2 + c_1$$

Dado que $y'(0) = -1$, se tiene que

$$y'(0) = \sin(0) + 0^2 + c_1 \Rightarrow -1 = 0 + 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = -1$$

$$\text{Luego } y'(t) = \sin(t) + t^2 - 1$$

Ahora

$$y'(t) = \sin(t) + t^2 - 1 \Rightarrow \int y'(t) dt = \int \sin(t) dt + \int t^2 dt - \int dt$$

$$\Rightarrow y(t) = -\cos(t) + \frac{1}{3}t^3 - t + c_2$$

Dado que $y(0) = 1$, se tiene que

$$y(0) = -\cos(0) + \frac{1}{3}0^3 - 0 + c_2 \Rightarrow 1 = -1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 2$$

Finalmente, la solución del P.V.I. dado es

$$y(t) = -\cos(t) + \frac{1}{3}t^3 - t + 2 \quad \square$$