UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 3 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 30 MINUTOS FECHA : Vi 04/04/14

1) Obtenga el valor medio de $f(x) = cos(2x)\, sen(3x)$ con $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(30 puntos).

<u>Solución:</u>
Recordemos que el valor medio VM de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ está dado por

$$VM = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Luego el valor medio de $f(x) = cos(2x)\, sen(3x)$ con $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es

$$VM = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)\, sen(3x)\ dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)\, sen(3x)\ dx$$

Calculemos ahora $\int cos(2x)\, sen(3x)\ dx$

Para resolver esta integral es necesario recordar la identidad trigonométrica :

$$cos(\alpha)\, sen(\beta) = \frac{1}{2} \left[sen(\alpha + \beta) - sen(\alpha - \beta)\right]$$

Luego con $\alpha = 2x$ y $\beta = 3x$, se tiene que :

$\frac{1}{2}\int sen(5x)\, dx + \frac{1}{2}\int sen(x)\, dx = \ -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\ cos(5x) - \left(\frac{1}{2}\right)cos(x) + c =$

$-\ \frac{1}{10}cos(5x) - \frac{1}{2}\ cos(x) + c$

Volviendo al valor medio se tiene que:

$VM = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)\, sen(3x)\ dx = \frac{2}{\pi}\left[-\ \frac{1}{10}cos(5x) - \frac{1}{2}\ cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{5}\right] = \frac{6}{5\pi}$

Finalmente el valor medio de $f(x) = cos(2x)\, sen(3x)$ con $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es $VM = \frac{6}{5\pi}$ ❑

2) Muestre que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^3(\theta)\ d\theta\ > 0$

(30 puntos).

Solución:

$\int sec^3(\theta)\ d\theta\ = \int sec^2(\theta)\ sec(\theta)\ d\theta$

Usando integración por partes

$p' =\ sec^2(\theta) \Rightarrow p = tg(\theta)$

$q = u = sec(\theta) \Rightarrow q' = sec(\theta)\ tg(\theta)$

$\int sec^3(\theta)\ d\theta = sec(\theta)\ tg(\theta) - \int sec(\theta)\ tg(\theta)\ tg(\theta)\ d\theta =$

$sec(\theta)\ tg(\theta) - \int sec(\theta)\ tg^2(\theta)\ d\theta =$

$sec(\theta)\ tg(\theta) - \int sec(\theta)\left[sec^2(\theta) - 1\right]d\theta =$

$sec(\theta)\ tg(\theta) - \int \left[sec^3(\theta) - sec(\theta)\right]d\theta =$

$$sec(\theta)\ tg(\theta) - \int sec^3(\theta)\ d\theta + \int sec(\theta)\ d\theta$$

Pero, usando la sustitución $u = sec(\theta) + tg(\theta)$ se obtiene:

$$\int sec(\theta)\ d\theta = \int sec(\theta)\left[\frac{sec(\theta)+tg(\theta)}{sec(\theta)+tg(\theta)}\right] d\theta = \int \frac{du}{u} = ln(u) = ln\Big[sec(\theta) + tg(\theta)\Big]$$

Pues

$$u = sec(\theta) + tg(\theta) \Rightarrow du = \Big[sec(\theta)tg(\theta) + sec^2(\theta)\Big]d\theta$$

$$du = \Big[tg(\theta) + sec(\theta)\Big]sec(\theta)\, d\theta$$

Así

$$\int sec^3(\theta)\ d\theta = sec(\theta)\ tg(\theta) - \int sec^3(\theta)\ d\theta + ln\Big[sec(\theta) + tg(\theta)\Big] \Rightarrow$$

$$2\int sec^3(\theta)\ d\theta = sec(\theta)\ tg(\theta) + ln\Big[sec(\theta) + tg(\theta)\Big] \Rightarrow$$

$$\int sec^3(\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}sec(\theta)\ tg(\theta) + \frac{1}{2}ln\Big[sec(\theta) + tg(\theta)\Big] + c$$

Luego

$$\int sec^3(\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}sec(\theta)\ tg(\theta) + \frac{1}{2}ln\Big[sec(\theta) + tg(\theta)\Big] + c\ ,$$

con c una constante real cualquiera.

Calculemos ahora $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^3(\theta)\ d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^3(\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}sec(\theta)\ tg(\theta) + \frac{1}{2}ln\Big[sec(\theta) + tg(\theta)\Big]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}ln\Big[\sqrt{2}+1\Big] - 0 - \frac{1}{2}ln\Big[1\Big] = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}ln\Big[\sqrt{2}+1\Big] - 0 - 0 =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}ln\Big[\sqrt{2}+1\Big] \approx 1.1478 > 0 \ \square$$