UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 CÁLCULO INTEGRAL + EDO

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL — INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ CARRERA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Ma 27/11/18

1) Resuelva:

$a)\ \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+9)}$

Solución:

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}\ (x+9)} = \lim_{b\to 0^+}\int_b^9 \frac{dx}{\sqrt{x}\ (x+9)}$$

Consideremos el cambio de variable $x = z^2$, del cual se obtiene $dx = 2zdz$ y

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ (x+9)} = \int \frac{2z\,dz}{z\ (9+z^2)} = 2\int \frac{dz}{9+z^2}$$

Usando la sustitución trigonométrica $z = 3\,tg(\theta)$, se tiene que $dz = 3sec^2(\theta)d\theta$
Así,

$$2\int \frac{dz}{9+z^2} = 2\int \frac{3sec^2(\theta)d\theta}{9+(3\,tg(\theta))^2} = 2\int \frac{3\,sec^2(\theta)d\theta}{(9+9\,tg^2(\theta)} = \frac{6}{9}\int \frac{sec^2(\theta)d\theta}{1+tg^2(\theta)}$$
$$= \frac{2}{3}\int \frac{sec^2(\theta)d\theta}{sec^2(\theta)} = \frac{2}{3}\int d\theta = \frac{2}{3}\theta = \frac{2}{3}Arctg(\tfrac{z}{3}) = \frac{2}{3}Arctg(\frac{\sqrt{x}}{3})$$

Volviendo a la integral original

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}\ (x+9)} = \lim_{b\to 0^+}\int_b^9 \frac{dx}{\sqrt{x}\ (x+9)}$$
$$= \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{2}{3}Arctg(\frac{\sqrt{x}}{3})\right]\Bigg|_b^9 = \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{2}{3}Arctg(\frac{\sqrt{9}}{3}) - \frac{2}{3}Arctg(\frac{\sqrt{b}}{3})\right]$$
$$= \left[\frac{2}{3}Arctg(1)\ \lim_{b\to 0^+} 1 - \frac{2}{3}\ \lim_{b\to 0^+} Arctg(\frac{\sqrt{b}}{3})\right]$$
$$= \left[\frac{2}{3}Arctg(1) - \frac{2}{3}\ Arctg(\tfrac{0}{3})\right] = \left[\frac{2}{3}Arctg(1) - \frac{2}{3}\ Arctg(0)\right]$$
$$= \left[\frac{2}{3}Arctg(1) - \frac{2}{3}\ 0\right] = \frac{2}{3}(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{6}$$

Finalmente, podemos decir que la integral dada es convergente y además
$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \frac{\pi}{6}$ ❑

$b)$ $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} dx$

Solución:

Sean $p(x) = x^3 + x + 1$ y $q(x) = x^2 + 1$. Como el grado de $p(x)$ es mayor que el grado de $q(x)$, debemos ocupar división sintética para obtener
$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$
con $grado(r(x)) < grado(q(x))$. Observe que $r(x)$ representa el resto de la división y $c(x)$ representa el cuociente.

Calculemos el cociente y el resto.

$x^3 + x + 1 : x^2 + 1 = x$
${}^{(-)}x^3 + {}^{(-)}x$

$0\,x^3 + 0\,x + 1$

De lo anterior concluimos que $r(x) = 1$, y $c(x) = x$
Luego, $\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}$

Luego,
$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\, dx = \int \left[x + \frac{1}{x^2+1}\right] dx$
$= \int x\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2} + Arctg(x) + c$

Finalmente,
$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2} + Arctg(x) + c$,

con c una constante real cualquiera. ❑

(30 puntos).

2) Obtenga:
$a)$ la solución del P.V.I. : $y' - y = 2x - 3,\ y(1) = 3$

Solución:

Tenemos que la ecuación dada es de primer orden lineal, con $p(x) = -1$ y $q(x) = 2x - 3$

Obtengamos, en primer lugar, la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada $y' - y = 0$

$y' - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow ln|\,y\,| = x + c \Rightarrow y = e^{x+c}$

$\Rightarrow y(x) = k\, e^{x}$, con $k = e^{c} > 0$

Supongamos ahora que $y_{nh}(x) = k(x)\, e^{x}$ es solución de la ecuación original $y' - y = 2x - 3$

$y'_{nh} - y_{nh} = 2x - 3 \Rightarrow k'\, e^{x} + k\, e^{x} - k\, e^{x} = 2x - 3$
$\Rightarrow k'e^{x} = 2x - 3 \Rightarrow k' = (2x-3)\, e^{-x} \Rightarrow k = \int (2x-3)\, e^{-x}\, dx$
Calculemos esta integral usando integración por partes

$p' = e^{-x} \Rightarrow p = -e^{-x}$
$q = 2x - 3 \Rightarrow q' = 2$

$k = \int (2x-3)\, e^{-x}\, dx = -(2x-3)\, e^{-x} + 2\int e^{-x} dx =$
$(3-2x)\, e^{-x} - 2\, e^{-x} + m = (3 - 2x - 2)\, e^{-x} + m = (1-2x)e^{-x} + m$

La solución de la edo lineal original es

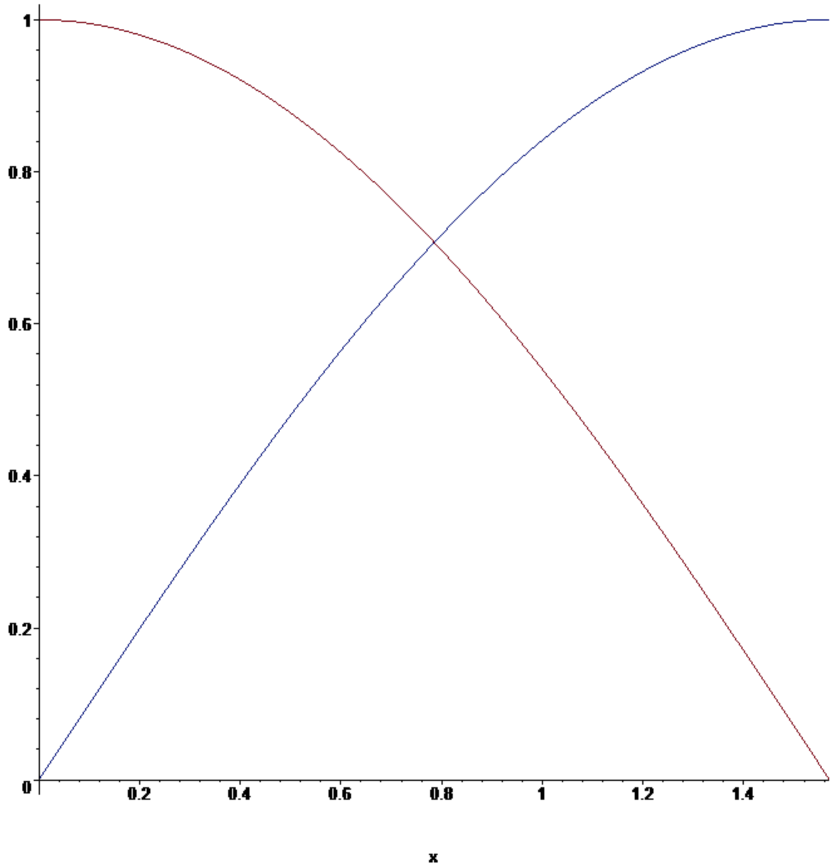
$y_{nh}(x) = k(x)\, e^{x} = ((1-2x)e^{-x} + m)e^{x} = 1 - 2x + m\, e^{x}$

Ocupemos la condición inicial $y_{nh}(1) = 3$

$y_{nh}(1) = 3 \Rightarrow 1 - 2 + m\, e = 3 \Rightarrow m\, e = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{e}$

Finalmente, $y(x) = 1 - 2x + \frac{4}{e}\, e^{x} = 1 - 2x + 4\, e^{x-1}$ ❑

$b)$ el área de la región acotada por $y = sen(x)$, $y = cos(x)$, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$
Solución:



Obtengamos los puntos de intersección entre las curvas

$sen(x) = cos(x) \Rightarrow \frac{sen(x)}{cos(x)} = 1 \Rightarrow tg(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Ahora, si notamos que $cos(0) = 1$ y $sen(0) = 0$ nos damos cuenta que entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ la función seno está por debajo de coseno, y entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$ es lo contrario, entonces

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos(x) - sen(x))\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (sen(x) - cos(x))\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (sen(x)\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx$$

$$= sen(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - cos(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - sen(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen(0) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - cos(0) - cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\, sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\, cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 - 1 = 2\sqrt{2} - 2 \quad \square$$

(30 puntos).